KARTA PRACY 6.1. POJĘCIE FUNKCJI, FUNKCJA LICZBOWA I JEJ WYKRES

ZADANIE 1.

Poniżej przedstawiono kilka przyporządkowań, z których funkcją nie jest:

A. Niech X będzie zbiorem zawodników drużyny siatkarskiej, a Y zbiorem liczb naturalnych. Przyporządkowanie f przypisuje każdemu zawodnikowi jego numer na koszulce.

B. Niech X będzie zbiorem trapezów, a Y zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich. Przyporządkowanie g przypisuje każdemu trapezowi ze zbioru X dokładnie jedną liczbę ze zbioru Y będącą obwodem danego trapezu.

C. Każdej liczbie całkowitej przyporządkowujemy jej sześcian.

D. Przyporządkowanie f każdej liczbie rzeczywistej $x \geq 0$ przypisuje wszystkie liczby rzeczywiste y takie, że $y^2 = x$.

ZADANIE 2.

Wykresem funkcji $f: X \to Y$, gdzie $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $f(x) = -|x| + 2$ jest zbiór:

A. $\{(-2, -2), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

B. $\{(-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

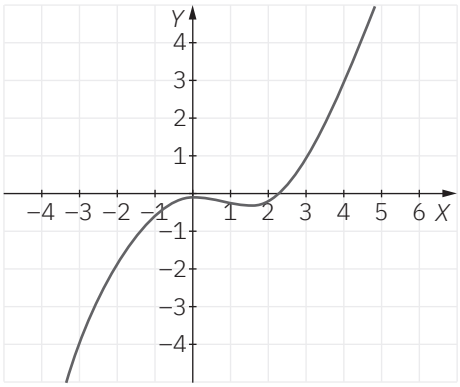
C. $\{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

D. $\{(0, 2), (1, 1), (2, 0)\}$

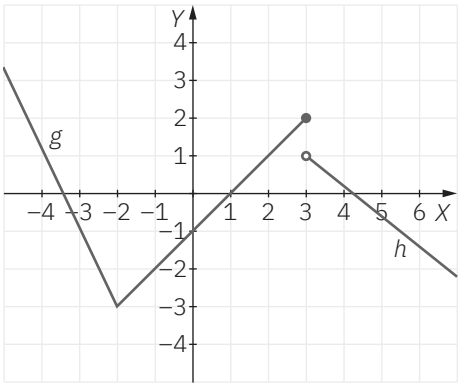
ZADANIE 3.

Który z poniższych wykresów nie przedstawia funkcji?

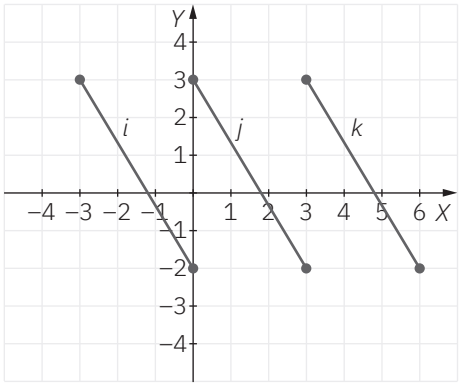
A.



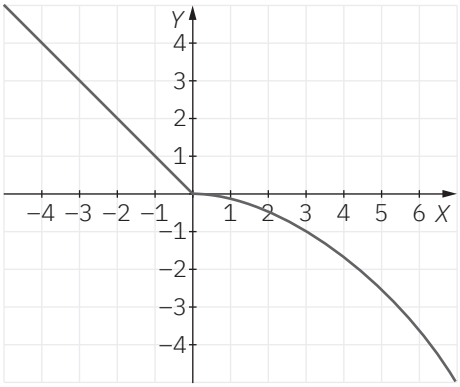
B.



C.



D.



ZADANIE 4.

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej sumę kwadratów danej liczby oraz danej liczby pomniejszonej o 2. Wówczas funkcję f można opisać wzorem:

A. $f(x)=(x^2)^2+(x^2-2)^2,\ x\in\mathbb{Z}$

B. $f(n)=n^2+(n+2)^2,\ n\in\mathbb{N}$

C. $f(x)=x^2+(x-2)^2,\ x\in\mathbb{Z}$

D. $f(x)=(x^2+(x+2))^2,\ x\in\mathbb{Z}$

ZADANIE 5.

Dla jakiej wartości m, $m\in\mathbb{R}$, punkt $P(-4, 0)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=\frac{m+2}{x}+1$?

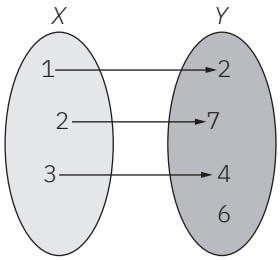
ZADANIE 6.

Naszkicuj wykres funkcji f, która każdej liczbie naturalnej mniejszej od 18 przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 6.

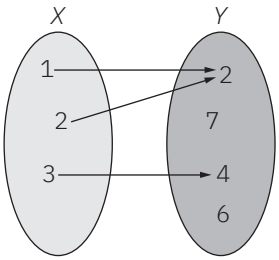
ZADANIE 1.

Spośród poniższych rysunków wskaż ten, który nie przedstawia funkcji.

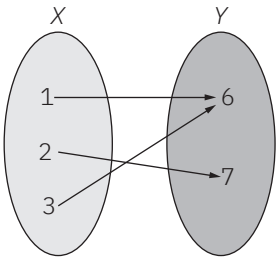
A.



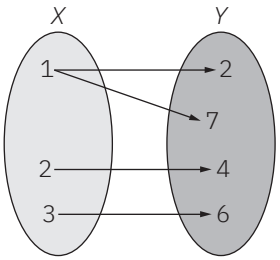
B.



C.



D.



ZADANIE 2.

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej połowę liczby do niej odwrotnej. Funkcję f można określić wzorem:

A. $f(x)=\frac{1}{2}x$ B. $f(x)=-\frac{1}{2x}$ C. $f(x)=-\frac{1}{2}x$ D. $f(x)=\frac{1}{2x}$.

ZADANIE 3.

Przedstaw w postaci tabeli oraz za pomocą grafu funkcję $f(x)=3-2x$ określoną dla $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

ZADANIE 4.

Funkcja $f: X\to Y$, gdzie $X=\{-2,-1,0,1,2\}$, $Y=\{1,2,5\}$, jest określona za pomocą tabeli.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2	5

Przedstaw funkcję f za pomocą grafu i podaj jej wzór.

ZADANIE 5.

Opisz następującą funkcję f za pomocą tabeli oraz zbioru par uporządkowanych, gdzie:

a) funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie pierwszej mniejszej od 10 sześcian tej liczby pomniejszony o 1;

b) funkcja f każdej liczbie całkowitej ze zbioru $X = \{-10, -2, 0, 3, 5, 10\}$ przyporządkowuje połowę liczby do niej przeciwnej;

c) funkcja f każdej liczbie naturalnej z przedziału $\langle 15, 20 \rangle$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 5;

d) funkcja f każdej liczbie ze zbioru $X = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ przyporządkowuje wartość bezwzględną różnicy tej liczby i podwojonego pierwiastka kwadratowego z tej liczby.

ZADANIE 6.

Naszkicuj wykresy podanych funkcji.

a) $f(x) = 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = [x] + 2,\ x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \le -1 \\ 2x+4 & x > -1 \end{cases},\ x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{1 - x},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

KARTA PRACY 6.3. DZIEDZINA FUNKCJI, ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI

ZADANIE 1.

Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{3x-7}}{x^2+1}$ jest:

A. $D_f=\mathbb{R}$ B. $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ C. $D_f=\left(2\frac{1}{3},+\infty\right)$ D. $D_f=\left\langle 2\frac{1}{3},+\infty\right)$

ZADANIE 2.

Funkcja $f(x)=220+|x+\log_2 1024|$ przyjmuje wartość 225 dla argumentu:

A. -15 B. $-\sqrt{15}$ C. $\sqrt{15}$ D. 15

ZADANIE 3.

Liczba k jest największą, a liczba l, $l\neq 0$, jest najmniejszą liczbą całkowitą należącą do dziedziny funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{\sqrt{5-|x+1|}}{\sqrt{-x}}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{k}{l}$, a następnie zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Wyznacz dziedzinę funkcji f, gdzie:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x+7}}{|x+1|-3}+\frac{\sqrt{-2x+4}}{\sqrt{|x-2|-1}}$

b) $f(x)=\frac{7-x}{\sqrt{x^2-4\sqrt{2}x+8}}-\frac{\sqrt{3-|x|}}{x^2-1}$

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

d) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

ZADANIE 5.

Wykaż, że dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-x}$ oraz zbiorem wartości funkcji f są zbiory jednoelementowe.

KARTA PRACY 6.4. WARTOŚĆ FUNKCJI W PUNKCIE

ZADANIE 1.

Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x+2}{|x+2|+1}$. Wartość funkcji f dla argumentu $\sqrt{2}-2$ wynosi:

A. $1-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $2-\sqrt{2}$ D. $2+\sqrt{2}$.

ZADANIE 2.

Punktami stałymi funkcji f, gdzie $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+6, & \text{gdy } x\geq 0\\ 2x+5, & \text{gdy } x<0\end{cases}$, są:

A. $x=3$ lub $x=-2{,}5$ B. $x=-5$ lub $x=4$ C. $x=5$ lub $x=6$ D. $x=-3$ lub $x=2{,}5$

ZADANIE 3.

Niech k będzie sumą kwadratów wszystkich miejsc zerowych funkcji $f(x)=\sqrt{16-|x|}\left(2x^2-32x\right)$. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności liczby k.

ZADANIE 4.

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\begin{cases}4, & \text{gdy } x\geq 8\\ \frac{(x-2)(x-6)}{3}, & \text{gdy } x<8\end{cases}$.
Wykaż, że $f\left(\sqrt{97}\right)=f(0)$.

ZADANIE 5.

Dla jakich argumentów funkcja $f(x)=|5-2x|+2x$ przyjmuje wartość 15? Wyznacz punkty stałe funkcji f, miejsca zerowe funkcji f oraz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy.

ZADANIE 6.

Niech $f(x)=\begin{cases} 2x-4, & \text{gdy} \quad x\geq 1 \\ \dfrac{2ax+3}{x+1}, & \text{gdy} \quad x<1 \end{cases}$ oraz $f(-2)=3$.

a) Wyznacz a oraz zapisz i naszkicuj wzór funkcji f.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f (o ile istnieją).
c) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f oraz osi Oy.
d) Podaj zbiór wartości funkcji f.

ZADANIE 7.

Punkt $P(-2,-10)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=ax^3+2x^2+3x+4$. Wyznacz wartość współczynnika a.

KARTA PRACY 6.5. NAJMNIEJSZA I NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ FUNKCJI

ZADANIE 1.

Funkcja $f(x)=\frac{-3}{3x-1}$, gdzie $x\in(-\infty,0\rangle$, osiąga największą wartość równą:

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{3}{4}$ C. -3 D. 3

ZADANIE 2.

Funkcja $f(x)=\begin{cases}|x+2|-3, & \text{gdy } x\geq\frac{5}{2}\\ |x+3|-3, & \text{gdy } x<\frac{5}{2}\end{cases}$ osiąga w przedziale $\langle-4,-2)$ najmniejszą wartość dla argumentu:

A. $x=-4$ B. $x=-\frac{7}{2}$ C. $x=-3$ D. $-\frac{5}{2}$

ZADANIE 3.

Oblicz iloczyn najmniejszej i największej wartości funkcji $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{9}{10}$ w przedziale $\langle-2,3\rangle$, a następnie zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Dla jakiej wartości parametru m, $m \in \mathbb{R}$, funkcja $f(x) = |x - m| + 2$ osiąga wartość najmniejszą dla argumentu $x = 4$?

ZADANIE 5.

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = -x^2 + 4x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 6.

Wykaż, że funkcja $f(x) = 4x^2 + 4x - 1$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, osiąga najmniejszą wartość równą (-2).

ZADANIE 7.

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, przyjmuje najmniejszą wartość równą (-1), natomiast największą wartość równą 1.

KARTA PRACY 6.6. FUNKCJA MONOTONICZNA

ZADANIE 1.

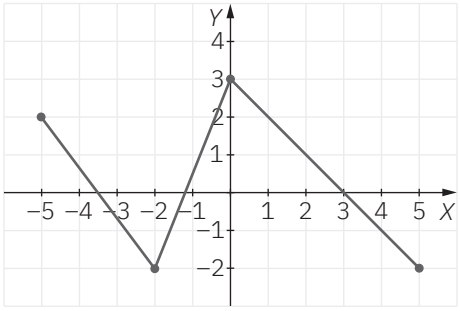
Funkcja $f(x) = -3|x|$ w przedziale $(-\infty, -3)$ jest:

A. malejąca B. rosnąca C. stała D. nierosnąca

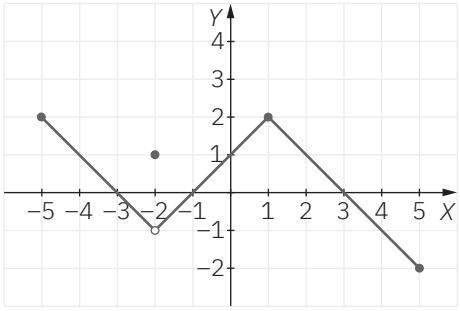
ZADANIE 2.

Funkcją rosnącą w przedziale $\langle -2, 1\rangle$ jest funkcja:

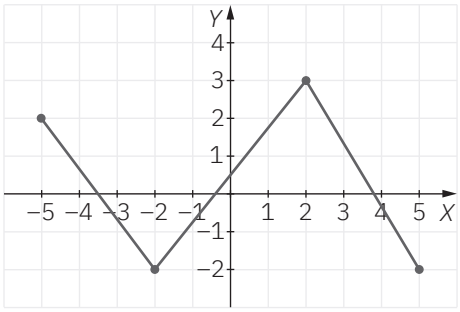
A.



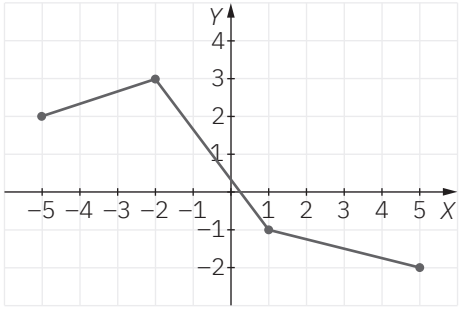
B.



C .

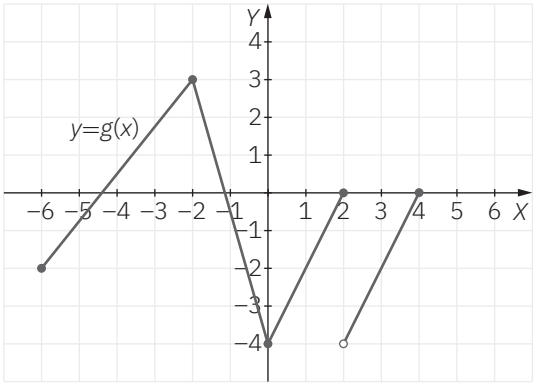


D.



ZADANIE 3.

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji g:



Wybierz prawidłową odpowiedź.

A. W przedziale $\langle 0, 4\rangle$ funkcja g jest rosnąca.

B. W przedziale $\langle -6, -2\rangle \cup \langle 0, 4\rangle$ funkcja g jest rosnąca.

C. W przedziale $\langle 0, 2\rangle$ funkcja g jest rosnąca.

D. Funkcja g jest funkcją monotoniczną.

ZADANIE 4.

Wykaż, że funkcja $f(x)=\sqrt{x-4}+2$ jest rosnąca w swojej dziedzinie.

ZADANIE 5.

Udowodnij, że funkcja $f(x)=x^2-\sqrt{3}x$ jest malejąca w przedziale $\left(-\infty,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

ZADANIE 6.

Zbadaj monotoniczność funkcji danej wzorem $g(x)=\frac{-2}{x-4}+2$ w zbiorze $(4,+\infty)$.

ZADANIE 7.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}-|x|$ i na jego podstawie określ maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f.

KARTA PRACY 6.7. PRZEKSZTAŁCENIA WYKRESU FUNKCJI

ZADANIE 1.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\begin{cases} \left||x+1|-5\right|, & \text{gdy} \quad x\geq 0 \\ -x+3, & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases}$.

Równanie $f(x)=3$ ma dokładnie:

A. jedno rozwiązanie B. dwa rozwiązania C. cztery rozwiązania D. pięć rozwiązań

ZADANIE 2.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f=\left\langle -\sqrt{3}, 10\right\rangle$. Dziedziną funkcji g określonej wzorem $g(x)=-f\left(x-\sqrt{3}\right)+10$ jest zbiór:

A. $D_g=\left\langle -2\sqrt{3}, 20\right\rangle$ B. $D_g=\left\langle -\sqrt{3}+10, 20\right\rangle$ C. $D_g=\left\langle 0, 10+\sqrt{3}\right\rangle$ D. $D_g=\left\langle 10-\sqrt{3}, 10+\sqrt{3}\right\rangle$

ZADANIE 3.

Niech $f(x)=|x|$. Naszkicuj wykresy funkcji $g(x)=f(x-1)+4$ oraz $h(x)=2\left[f(x-1)-2\right]$ i na ich podstawie znajdź dwa rozwiązania równania $g(x)=h(x)$. Wyznacz kwadrat ich różnicy. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Niech $f(x)=\frac{1}{1-|x+2|}+1$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Na podstawie wykresu podaj zbiór wartości funkcji f.

c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie?

d) Odczytaj z wykresu miejsca zerowe funkcji f.

ZADANIE 5.

Wykres funkcji $f(x)=4x+5$ przesunięto o wektor $\vec{u}=[0, 2020]$, otrzymując wykres funkcji g. Następnie wykres funkcji g przekształcono w symetrii względem początku układu współrzędnych, otrzymując wykres funkcji h.

a) Zapisz wzór funkcji h.

b) Wykres funkcji g można otrzymać również przesuwając wykres funkcji f w wektor postaci $\vec{v}=[a, 0]$, gdzie $a \in R$. Wyznacz liczbę a i zapisz wzór funkcji g.

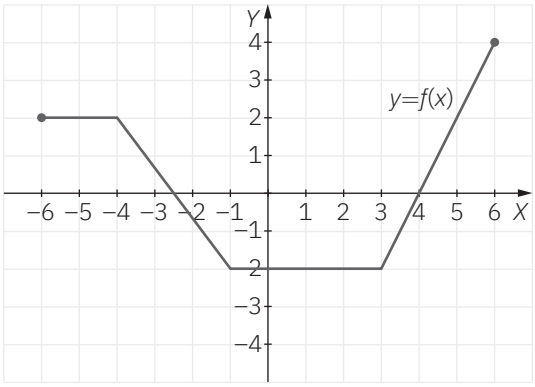
c) Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji h z osią Oy.

d) Wyznacz wzór funkcji p wiedząc, że wykres tej funkcji powstał w przekształceniu wykresu funkcji h w powinowactwie prostokątnym względem osi Ox i skali $k=\frac{3}{2}$.

ZADANIE 6.

Na wykresie obok przedstawiono wykres funkcji f.
Funkcja g określona jest wzorem $g(x)=|f(x+1)-2|$.

a) Naszkicuj wykres funkcji g.
b) Podaj zbiór miejsc zerowych funkcji g.
c) Podaj zbiór rozwiązań nierówności $g(x)\geq 2x+8$.



ZADANIE 7.

Dana jest funkcja $f(x)=2\sqrt{x-1}-4$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.
b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=-f(x)$.
c) Naszkicuj wykres funkcji $h(x)=f(-x)$.

ZADANIE 8.

Jakie przekształcenia należy wykonać, aby z wykresu funkcji $f(x)=x^2$ otrzymać wykres funkcji $h(x)=2-(4-3x)^2$?

KARTA PRACY 6.8. SPORZĄDZANIE WYKRESÓW FUNKCJI. ODCZYTYWANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI Z JEJ WYKRESU

ZADANIE 1.

Niech $f(x)=\left||x-2|-4\right|$. Nieprawdą jest, że:

A. iloczyn miejsc zerowych funkcji f jest liczbą niedodatnią;
B. funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla $x=2$;
C. zbiór rozwiązań równania $f(x)=4$ jest postaci $\{-6, 2, 10\}$;
D. funkcja nie przyjmuje wartości największej.

ZADANIE 2.

Dla ilu argumentów funkcje $f(x)=\left||x-1|-4\right|$ i $g(x)=2$ przyjmują te same wartości?

A. nie ma takiego argumentu
B. są dwa takie argumenty
C. są trzy takie argumenty
D. są cztery takie argumenty

ZADANIE 3.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left|\left||x-3|-1\right|-1\right|$, a następnie na jego podstawie zakoduj, w kolejności rosnącej, wartości miejsc zerowych funkcji f.

ZADANIE 4.

Dana jest funkcja $f(x)=x^2$. Rozważmy funkcję $g(x)=|f(x-2)-4|$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $g(x)=m$ ma dwa rozwiązania takie, że ich iloczyn jest liczbą niedodatnią.

ZADANIE 5.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{2}{x-1}+2$ i na jego podstawie określ liczbę rozwiązań równania $|f(x)|=m$ z niewiadomą x.

ZADANIE 6.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=|x-2|+|x+3|$. Na podstawie wykresu funkcji f określ liczbę rozwiązań równania $f(x)=k$ w zależności od parametru k, a następnie wyznacz zbiór rozwiązań tego równania dla $k=5$.

KARTA PRACY 6.9. KARTA POWTÓRZENIOWA

ZADANIE 1.

Miejscami zerowymi funkcji $f(x)=\dfrac{(x^3+25x)\sqrt{25-\sqrt{4x^2+4x+1}}}{x^2-2x}$ są liczby:

A. $-3, 2$ B. $-3, 0, 2$ C. $-5, -3, 5$ D. 0

ZADANIE 2.

Punkt przecięcia wykresu funkcji $f(x)=\begin{cases} -2x+6, & x\in(-\infty,-5) \\ x^2+4x+2, & x\in\langle -5,0) \\ \left(1-\log_{\sqrt{11}}2\sqrt{6}\right)x-3, & x\in\langle 0,4\rangle \\ \log_{2\sqrt{2}}128-x, & x\in(4,+\infty) \end{cases}$ z osią Oy to:

A. $(0, 6)$ B. $(2, 0)$ C. $(0, -3)$ D. $\left(0, \dfrac{14}{3}\right)$

ZADANIE 3.

Niech $f(x)=\left|\left|x+\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{3}{4}$. Wyznacz niedodatnie miejsce zerowe funkcji f, rzędną punktu przecięcia wykresu funkcji f z osią Oy, a następnie wyznacz wartość bezwzględną ich średniej arytmetycznej. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{|x+5|+|3-x|}{x+1}$, dla każdej liczby $x \in R-\{-1\}$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

ZADANIE 5.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{(8+x^3)(x^2+8x+16)}{\sqrt{4-\sqrt{x^2}}}$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji f.
b) Oblicz punkty przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.
c) Wyznacz wartość k, $k \in \mathbb{R}$ tak, aby punkt $A\left(-1, 20\sqrt{3}+1-k\right)$ należał do wykresu funkcji f.

ZADANIE 6.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\begin{cases} -2x+3, & \text{gdy } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x-4, & \text{gdy } x < 1 \end{cases}$.

Wyznacz punkty stałe funkcji f (o ile istnieją).

ZADANIE 7.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = x^2$ sporządź wykres funkcji $g(x) = |-f(x+2)+1|$. Na podstawie wykresu funkcji g określ liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$ w zależności od parametru m, $m \in \mathbb{R}$.

KARTA PRACY 7.1. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM

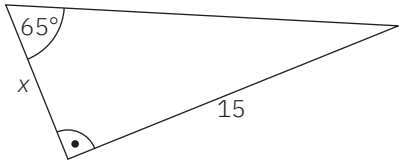
ZADANIE 1.

Kąt α jest kątem ostrym w trójkącie prostokątnym oraz $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Zatem $\sin(90^\circ - \alpha)$ jest równy:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ZADANIE 2.

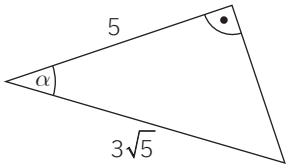
Na rysunku poniżej długość boku x z dokładnością do części dziesiętnych wynosi:



A. 6,9 B. 7 C. 32,1 D. 32,2

ZADANIE 3.

Wykorzystując dane z rysunku poniżej, oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



ZADANIE 4.

W trójkącie prostokątnym ABC naprzeciwko kąta α leży przyprostokątna o długości x, $x > 1$. Przeciwprostokątna tego trójkąta jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej. Wykaż, że $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

ZADANIE 5.

Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b i przeciwprostokątnej c. Wiedząc, że przyprostokątna a leży naprzeciw kąta α oraz $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{a^2 + c^2}{3bc}$.

ZADANIE 6.

W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta α leży przyprostokątna o długości $2\sqrt{3}$. Wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

ZADANIE 7.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest rozwarty. Wysokość CD poprowadzona do przedłużenia boku AB ma długość 10 cm. Wiedząc, że $|BD| = 5$ cm oraz $|AC| = 26$ cm, wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\sphericalangle CAB$.

KARTA PRACY 7.2. WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH KĄTÓW

ZADANIE 1.

Wartość wyrażenia $2\left(\operatorname{tg}30^\circ - \sin 60^\circ\right)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}30^\circ} - \cos 45^\circ\right)$ wynosi:

A. $\frac{\sqrt{6}-6}{6}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

ZADANIE 2.

Miara kąta ostrego α, gdzie $2\left(\cos\alpha - \sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$, wynosi:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

ZADANIE 3.

W trójkącie rozwartokątnym ABC, $|\sphericalangle ABC| = 135^\circ$. Wiedząc, że $|AB| = 10\,\text{cm}$ oraz $|BC| = 5\sqrt{2}\,\text{cm}$, oblicz $|AC|$. Zakoduj cyfrę dziesiątek, jedności oraz pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Uzasadnij, że liczba $\frac{4\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 60^\circ - \cos 30^\circ\cdot\sin 60^\circ}{18\cdot\sin 30^\circ\,\operatorname{tg}30^\circ : \cos 30^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ}$ jest wymierna.

ZADANIE 5.

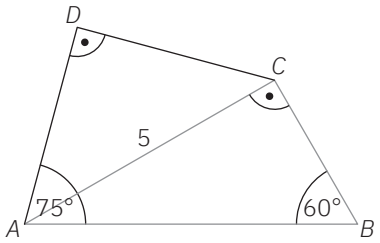
Wyznacz miarę kąta ostrego α, dla którego zachodzi równość $\frac{5\cdot\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha}{9\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{3}$.

ZADANIE 6.

W trapez równoramienny $ABCD$, $(AB||CD)$ o kącie rozwartym 120°, wpisano okrąg o środku w punkcie O. Punkt E jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem AD. Wiedząc, że obwód trójkąta EOD wynosi $(3-\sqrt{3})$, wyznacz długość promienia tego okręgu.

ZADANIE 7.

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku poniżej.



KARTA PRACY 7.3. ZASTOSOWANIE WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH W RÓŻNYCH DZIEDZINACH DZIAŁALNOŚCI CZŁOWIEKA

ZADANIE 1.

Przekątna działki w kształcie prostokąta ma długość 35 m i tworzy z dłuższym bokiem kąt o mierze 30°. Zatem na ogrodzenie tej działki potrzeba około:

A. 48 m bieżących siatki
B. 96 m bieżących siatki
C. 131 m bieżących siatki
D. 191 m bieżących siatki

ZADANIE 2.

Promienie słoneczne padają na rosnące na łące drzewo pod kątem 14°. Drzewo to rzuca cień długości 25 m. Zatem wysokość drzewa jest równa około:

A. 5 m
B. 6 m
C. 12 m
D. 24 m

ZADANIE 3.

Aby wylądować na płycie lotniska samolot powinien schodzić w dół pod kątem 3°. Jak daleko od początku pasa startowego powinien rozpocząć manewr podejścia do lądowania samolot, który leci na wysokości 2100 m n.p.m.? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Ania, stojąc na tarasie wieży widokowej na wysokości 30 m, widzi dwa czerwone samochody stojące na parkingu u podnóża wieży, jeden pod kątem depresji równym 47°, drugi – pod kątem równym 36°. Jaka jest odległość pomiędzy tymi pojazdami?

ZADANIE 5.

Do szklanki w kształcie walca o średnicy 5 cm i wysokości 10 cm nalano wody, która sięgała do wysokości 6 cm. Jaki jest największy kąt, pod jakim można przechylić szklankę tak, aby woda się nie wylała?

ZADANIE 6.

Sonar na okręcie Marynarki Wojennej wykrył łódź podwodną pod kątem 15° względem poziomu morza. Na jakiej głębokości znajduje się ta łódź podwodna, jeśli sonar wykrył ją w odległości 1400 m?

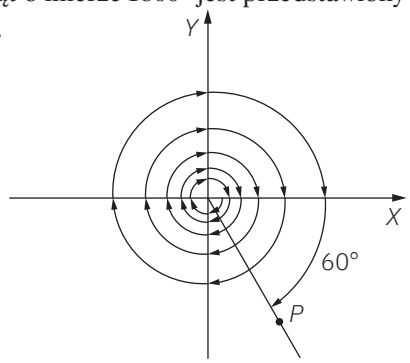
ZADANIE 7.

Balon wznosi się pionowo. Michał lecący balonem, będąc na wysokości 15 m, mierzy kąt depresji samochodu znajdującego się na dole i otrzymuje wynik 20°. Po upływie 10 sekund powtarza pomiar i tym razem otrzymuje kąt 44°. Z jaką średnią prędkością wznosi się balon?

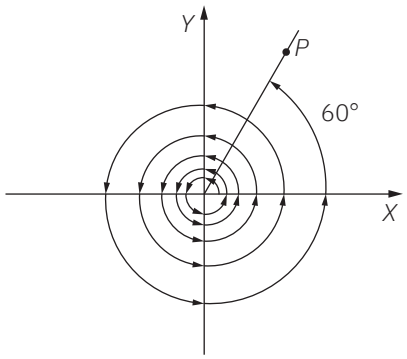
ZADANIE 1.

Kąt o mierze 1860° jest przedstawiony na rysunku:

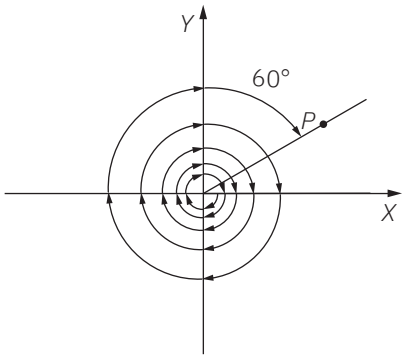
A.



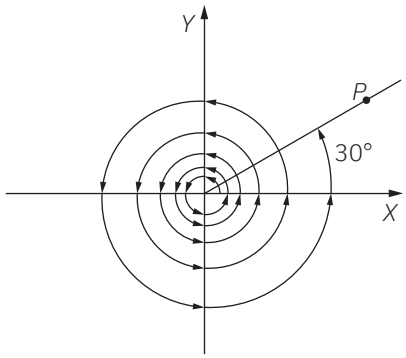
B.



C.



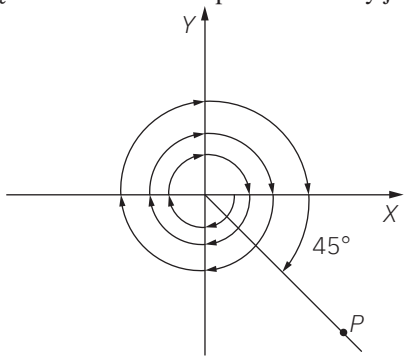
D.



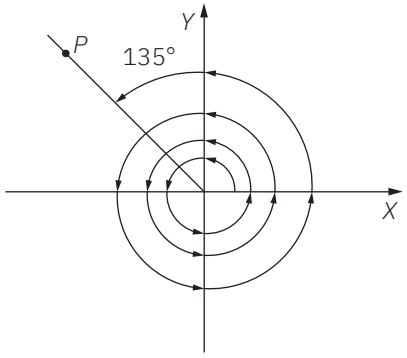
ZADANIE 2.

Kąt o mierze –1215° przedstawiony jest na rysunku:

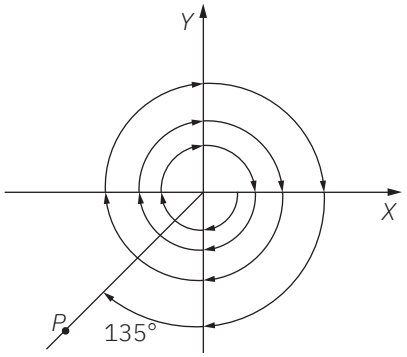
A.



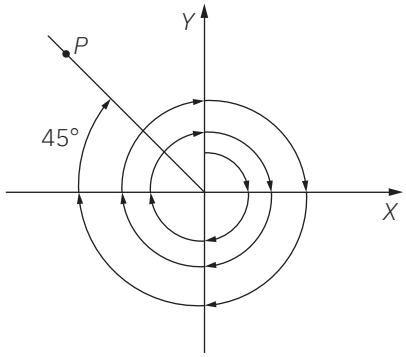
B.



C.



D.



ZADANIE 3.

Wyznacz miarę kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o godzinie 15.10. Odczytaj przybliżoną wartość cosinusa tego kąta i zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Wyznacz kąt, jaki zakreśliła wskazówka minutowa zegara od godziny 15.25 do 17.10.

ZADANIE 5.

Wskazówka minutowa zegara zakreśliła kąt o mierze 534° od godziny 11.45. Którą godzinę wskazuje zegar?

KARTA PRACY 7.5. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA

ZADANIE 1.

Wartość wyrażenia $\frac{\sin 180^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ}{\cos 360^\circ}$ wynosi:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

ZADANIE 2.

Kąt α jest umieszczony w układzie współrzędnych w położeniu standardowym (jedno ramię kąta α pokrywa się z dodatnią półosią Ox, a drugie ramię kąta znajduje się w jednej z czterech ćwiartek układu współrzędnych). Jeśli punkt $K\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}\right)$ należy do ramienia końcowego kąta α, to wartość wyrażenia $\cos\alpha - \sin\alpha$ wynosi:

A. $-\frac{12}{13}$ B. $-\frac{7}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $1\frac{4}{13}$

ZADANIE 3.

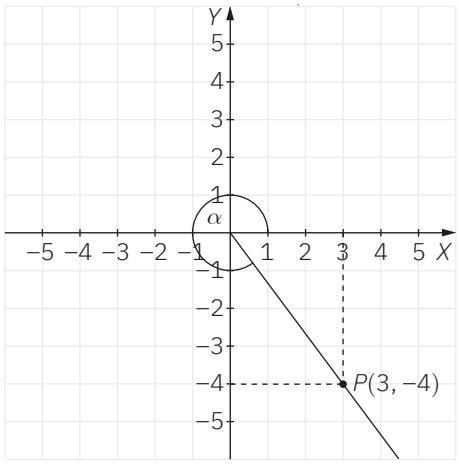
Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $P(-2, y)$ leży na końcowym ramieniu tego kąta. Wyznacz rzędną punktu P, gdy $\alpha = -120^\circ$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Kąt α, $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym i $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Wiedząc, że punkt S wybrano na końcowym ramieniu kąta α w odległości 9 od początku układu współrzędnych, wyznacz współrzędne punktu S.

ZADANIE 5.

Na rysunku poniżej jest przedstawiony kąt α, na ramieniu końcowym którego leży punkt P. Wyznacz wartość wyrażenia $(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)^2$.



ZADANIE 6.

Kąt α znajduje się w układzie współrzędnych w położeniu standardowym. Punkt $S(x_0, y_0)$ leży w III ćwiartce układu współrzędnych na końcowym ramieniu kąta α, o którym wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{5}$. Wiedząc, że odległość punktu S od początku układu współrzędnych wynosi $28\frac{1}{3}$, wyznacz współrzędne punktu S.

KARTA PRACY 7.6. ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI TEGO SAMEGO KĄTA

ZADANIE 1.

Kąt $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ i $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$. Zatem $\sin\alpha$ jest równy:

A. $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ B. $-\frac{7}{9}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

ZADANIE 2.

Nie istnieje kąt α taki, że:

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ i $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

B. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ i $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$

ZADANIE 3.

Niech α będzie kątem ostrym. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{|\cos^4\alpha - \cos^2\alpha|}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha}$.

ZADANIE 4.

Wiedząc, że $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ oraz $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 5.

Niech $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $2\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 3\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

ZADANIE 6.

Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych, wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{\operatorname{tg}35^\circ} - \cos 35^\circ > 0$.

ZADANIE 7.

Wiedząc, że $\alpha \in \left(0^\circ, 90^\circ\right)$ oraz $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3$, oblicz $\operatorname{tg}^4\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^4\alpha}$.

KARTA PRACY 7.7. DOWODZENIE TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNYCH

ZADANIE 1.

Dla kąta $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ) \cup (180^\circ, 270^\circ)$ tożsamością jest równość:

A. $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

B. $(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha) = 1 - \sin^2\alpha$

C. $\sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

D. $\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^4\alpha}$

ZADANIE 2.

Jeśli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to wyrażenie $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}}$ można zapisać w postaci:

A. $\cos^2\alpha$

B. $\sin^2\alpha - 1$

C. $\sin^2\alpha + 1$

D. $-\cos\alpha$

ZADANIE 3.

Niech $a = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$ oraz $b = \sin^2\alpha$, $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$. Wyznacz wartość wyrażenia $-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(a - 2b)$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α wartość wyrażenia $\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right)\cdot\sin\alpha$ jest liczbą naturalną.

ZADANIE 5.

Wykaż, że jeśli $\alpha\in(180^\circ,270^\circ)$, to $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=-\frac{2}{\sin\alpha}$.

ZADANIE 6.

Uzasadnij, że dla $\alpha\in(90^\circ,180^\circ)$ prawdziwa jest równość $\frac{\sqrt{1-\sin\alpha}-\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}+\sqrt{1+\sin\alpha}}=-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

ZADANIE 7.

Sprawdź, czy dla kąta ostrego α prawdą jest, że odwrotność wyrażenia $\sin\alpha+\cos\alpha$ jest równa $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{1-2\cos^2\alpha}$.

KARTA PRACY 7.8. WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

ZADANIE 1.

Dla dowolnego kąta ostrego α wyrażenie $\sin\alpha + \cos\left(90^\circ + \alpha\right)$ można zapisać w postaci:

A. $2\sin\alpha$ B. $-2\cos\alpha$ C. 0 D. $\sin\alpha - \cos\alpha$

ZADANIE 2.

Prawdą jest, że istnieje kąt α taki, że:

A. $\sqrt{5}\cdot\sin\alpha = 3$ B. $4\cdot\cos\alpha = -\sqrt{17}$ C. $2\cdot\cos\alpha = 2\sqrt{2}$ D. $3\cdot\sin\alpha = \sqrt{5}$

ZADANIE 3.

Wiedząc, że $\alpha \in \left(90^\circ, 180^\circ\right)$ oraz $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{5}$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$. Zakoduj cyfrę dziesiątek, jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Cosinus kąta ostrego α jest o 25% większy od sinusa tego kąta. Wyznacz $\sin\alpha$.

ZADANIE 5.

Uzasadnij, że liczba $\frac{\left(2\sin^2 5^\circ - 1\right)\cdot\left(1+\mathrm{tg}^2 5^\circ\right)}{1-\mathrm{tg}^2 5^\circ}$ jest całkowita.

ZADANIE 6.

Oblicz wartość wyrażenia $\left(\sin 25^\circ - \sin 65^\circ\right)^2 + \left(\cos 25^\circ + \cos 65^\circ\right)^2$.

ZADANIE 7.

Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych, wyznacz wartość wyrażenia:

$$\frac{2}{\cos^2 58^\circ - 1} - \frac{1}{\sin 32^\circ - 1} + \frac{1}{\sin 32^\circ + 1}.$$

KARTA PRACY 7.9. PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ TRYGONOMETRYCZNYCH

ZADANIE 1.

Niech $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ oraz $\beta \in (90^\circ, 180^\circ)$. Jeśli $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ i $\cos\beta = -\frac{8}{17}$, to:

A. $\beta = 180^\circ - \alpha$ B. $\beta - \alpha = 90^\circ$ C. $\alpha = 180^\circ + \beta$ D. $\alpha + \beta = 270^\circ$

ZADANIE 2.

Niech $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ) \cup (270^\circ, 360^\circ)$. Wyrażenie $\left(\sin\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \cos\alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\alpha$ można zapisać w postaci:

A. $\frac{1}{\sin\alpha}$ B. $\frac{1}{\cos\alpha}$ C. $\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ D. $tg\,\alpha$

ZADANIE 3.

Korzystając z własności funkcji trygonometrycznych, oblicz wartość wyrażenia:
$3 - \sqrt{3} \cdot \sin^2 16^\circ + \operatorname{tg} 53^\circ \cdot \operatorname{tg} 37^\circ - \sqrt{3} \cdot \sin^2 74^\circ$.
Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Wyznacz wartość wyrażenia $\log \operatorname{tg} 181^\circ + \log \operatorname{tg} 182^\circ + \log \operatorname{tg} 183^\circ + \ldots + \log \operatorname{tg} 267^\circ + \log \operatorname{tg} 268^\circ + \log \operatorname{tg} 269^\circ$.

ZADANIE 5.

Oblicz $\dfrac{2 \cdot \cos 1575^\circ - 3 \cdot \sin 450^\circ}{\sin 720^\circ - \cos\left(-600^\circ\right)}$.

ZADANIE 6.

Niech $a = 2^{\sin^2 1^\circ} \cdot 2^{\sin^2 2^\circ} \cdot 2^{\sin^2 3^\circ} \cdot \ldots \cdot 2^{\sin^2 87^\circ} \cdot 2^{\sin^2 88^\circ} \cdot 2^{\sin^2 89^\circ}$. Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{a}{2^{50}}$.

KARTA PRACY 7.10. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE I POLA FIGUR PŁASKICH

ZADANIE 1.

W trójkącie ABC dwa krótsze boki mają długość 4 cm i 5 cm. Sinus największego kąta wewnętrznego tego trójkąta wynosi $\frac{2}{5}$. Zatem pole tego trójkąta wynosi:

A. $2\sqrt{21}\,\text{cm}^2$ B. $4\,\text{cm}^2$
C. $5\,\text{cm}^2$ D. jest za mało danych, aby obliczyć

ZADANIE 2.

W równoległoboku o polu $8\sqrt{2}$ cosinus kąta ostrego jest równy $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. Iloczyn długości boków tego równoległoboku jest równy:

A. $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{16\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ D. $16\sqrt{5}$

ZADANIE 3.

W trójkącie równoramiennym ABC, $(|AC| = |BC|)$ wysokość CD o długości 5 cm tworzy z ramieniem AC kąt, którego sinus jest równy $\frac{\sqrt{21}}{14}$. Oblicz pole trójkąta ABC. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

W trapezie równoramiennym przekątna długości 12 cm tworzy z dłuższą podstawą kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7\sqrt{51}}{51}$. Wyznacz pole tego trapezu.

ZADANIE 5.

Dany jest czworokąt $ABCD$, na którym opisano okrąg. Niech $|\sphericalangle ABC| = \alpha$. Udowodnij, że wówczas pole tego czworokąta wyraża się wzorem $\frac{|AB|\cdot|BC|+|CD|\cdot|AD|}{2}\cdot\sin\alpha$.

ZADANIE 6.

Niech a oraz b oznaczają długości boków trójkąta. Wiedząc, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{\sqrt{3}}{4}ab$, wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta.

ZADANIE 7.

W trapezie $ABCD$ $(AB || CD)$, który wpisano w okrąg, ramię AD ma długość $4\sqrt{6}$ cm, a kąt $\sphericalangle BCD$ ma miarę 135°. Wiedząc, że krótsza podstawa tego trapezu ma długość 5 cm, wyznacz pole tego trapezu.

KARTA PRACY 7.11. KARTA POWTÓRZENIOWA

ZADANIE 1.

W trójkącie prostokątnym o bokach długości 9, 12, 15 tangens większego kąta ostrego wynosi:

A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

ZADANIE 2.

Wartość wyrażenia $\frac{2\left(\cos 405^\circ - \sin 570^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(-330^\circ\right)\cdot \operatorname{tg} 780^\circ}$ jest liczbą:

A. mniejszą od 1 B. wymierną C. przeciwną do $\sqrt{2}+1$ D. odwrotną do $\sqrt{2}-1$

ZADANIE 3.

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 3$, wyznacz wartość wyrażenia $\sin\alpha + \cos\alpha$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta α leży przyprostokątna o długości a. Wiedząc, że przeciwprostokątna jest o 2 dłuższa od drugiej przyprostokątnej, wykaż, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a^2+4a-4}{a^2+4}$.

ZADANIE 5.

Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, wyznacz jego miarę.

ZADANIE 6.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin^2(\alpha+90^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-270^\circ)-1} + \frac{\cos^2(\alpha-90^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+270^\circ)-1}$.

ZADANIE 7.

W równoległoboku $ABCD$ kąt ostry ma miarę 60°, a odległości punktu przecięcia się przekątnych od sąsiednich boków równoległoboku wynoszą odpowiednio $\sqrt{3}$ oraz $2\sqrt{3}$. Wyznacz długość krótszej przekątnej tego równoległoboku.

KARTA PRACY 8.1. WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ I JEJ WYKRES

ZADANIE 1.

Niech $f(x)=2-(2k-6)x$. Funkcja ta jest malejąca, gdy:

A. $k=0$ B. $k=2$ C. $k=3$ D. $k=4$

ZADANIE 2.

Niech $f(x)=\left(-\log_2\frac{1}{8}\right)x-3+\frac{1}{3}b$. Punkt $P\left(\frac{1}{3},1\right)$ należy do wykresu tej funkcji, gdy:

A. $b=3$ B. $b=9$ C. $b=\frac{35}{3}$ D. $b=15$

ZADANIE 3.

Miejscem zerowym funkcji $f(x)=-2\sqrt{2}x-1+b$ jest liczba $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Wówczas:

A. $b=-2$ B. $b=-1$ C. $b=1$ D. $b=3$

ZADANIE 4.

Wykres funkcji $f(x)=\left(2\sqrt{3}-3a\right)x+\sqrt{11}$ jest nachylony do osi Ox pod kątem 120^0, gdy:

A. $a=-2\sqrt{3}$ B. $a=\log_{3\sqrt{11}}1$ C. $a=\sqrt{3}$ D. $a=3\sqrt{3}$

ZADANIE 5.

Niech $f(x)=(7-2a)x+4b-3$. Wykres tej funkcji przecina oś Ox w punkcie o odciętej 6 oraz oś Oy w punkcie o odciętej 5. Wyznacz wartość wyrażenia a^4+b^5. Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek oraz jedności otrzymanego wyniku.

ZADANIE 6.

Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej $f(x)=ax+b$ wiedząc, że do wykresu tej funkcji należy punkt $A\left(2+\sqrt{3},-\sqrt{3}-1\right)$ oraz funkcja przyjmuje wartość $\left(-2\sqrt{3}\right)$ dla argumentu 6. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 7.

Niech $f(x)=-4x-2k+4$ oraz $g(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{1}{2}k$. Wyznacz wartość k, wiedząc, że logarytm, którego podstawą jest miejsce zerowe funkcji f z liczby logarytmowanej równej miejscu zerowemu funkcji g, jest równy 2.

ZADANIE 8.

Wyznacz wzór funkcji liniowej $f(x)=ax+b$, wiedząc, że wykres tej funkcji przecina oś Ox pod kątem α takim, że $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ oraz do wykresu tej funkcji należy punkt $P\left(\frac{\sqrt{46}}{23},\frac{2}{3}\right)$.

KARTA PRACY 8.2. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

ZADANIE 1.

Liczba (-2) jest rozwiązaniem równania $2x-\frac{1-x}{3}=4a-1$ wtedy, gdy:

A. $a=-2$ B. $a=-1$ C. $a=-\frac{1}{2}$ D. $a=2$

ZADANIE 2.

Rozwiązaniem równania $2x=\sqrt{3}(x+1)-1$ jest liczba należąca do przedziału:

A. $(-1,1)$ B. $\left(1,\frac{5}{2}\right)$ C. $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ D. $\left(\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$

ZADANIE 3.

Równanie $(k^2-4)x+1=|k+3|$ z niewiadomą x oraz parametrem $k, k\in\mathbb{R}$, jest równaniem tożsamościowym, gdy:

A. $k=-2$ B. $k=0$ C. $k=2$ D. $k\in\{-2,2\}$

ZADANIE 4.

Rozwiązaniem nierówności podwójnej $2x-6<3x+4<-5x-12$ jest zbiór:

A. $(-\infty,-10)$ B. $(-10,-2)$ C. $(-2,+\infty)$ D. pusty

ZADANIE 5.

Równaniem sprzecznym jest równanie:

A. $1-\frac{2x-3}{2}=6x$

B. $\left(\sqrt{2}-3\right)x=6-2\sqrt{2}$

C. $(2-x)(x+1)-10=x(4-x)-3x$

D. $(2x-1)(x+2)-7=2x(x+1)-x$

ZADANIE 6.

Dane jest równanie $k^2(x-1)-k\left(\sqrt{5}x-4\right)=k$ z niewiadomą x oraz parametrem k, $k\in\mathbb{R}$. Wyznacz wartość k, dla której dane równanie jest sprzeczne. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie początkowe cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

ZADANIE 7.

Dana jest nierówność $\sqrt{2}\left(2x-\sqrt{3}\right)-4\geq mx$ z niewiadomą x oraz parametrem m, $m\in\mathbb{R}$. Wyznacz wartość m, dla której dana nierówność jest sprzeczna. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 8.

Rozwiąż równania.

a) $3x-\frac{2-5\left(\frac{1}{5}-x\right)}{2}=6$

b) $\left(2\sqrt{2}-3x\right)\left(2\sqrt{2}+3x\right)-3x=4-(3x-1)^2$

ZADANIE 9.

Rozwiąż nierówności.

a) $2x-(x+1)^2 \le 3-x(2+x)$

b) $1-\dfrac{2-\frac{1}{2}(4-2x)}{3} \le 2x+1 \le 2-\dfrac{1-\frac{1-x}{2}}{3}$

ZADANIE 10.

Dane jest równanie $p^2(px-3)=2p(2x-3)$ z niewiadomą x oraz parametrem p, $p \in \mathbb{R}$. Wyznacz te wartości p, dla których dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zapisz rozwiązanie tego równania w najprostszej postaci.

ZADANIE 11.

Wyznacz wartości parametru k, dla których rozwiązania równania $2x-|12-4k|=6x-16$ z niewiadomą x zawierają się w przedziale $\langle -6, 3\rangle$.

KARTA PRACY 8.3. ZADANIA PROWADZĄCE DO RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

ZADANIE 1.

Aleksander kupił w księgarni trzy zbiory zadań do matematyki za łączną kwotę 210 zł. Stosunek cen tych zbiorów jest równy 2 : 4 : 8. Różnica między ceną najdroższego zbioru a sumą cen dwóch najtańszych zbiorów wynosi:

A. 7 zł B. 14 zł C. 21 zł D. 30 zł

ZADANIE 2.

Jeśli pewną liczbę x zwiększymy 3 razy i od otrzymanego wyniku odejmiemy trzecią część liczby x, to otrzymany wynik będzie równy liczbie x powiększonej o 20. Szukaną liczbą jest:

A. –51 B. 10 C. 12 D. 20

ZADANIE 3.

Franek, bawiąc się klockami, postanowił, że z połowy klocków zbuduje most, z pozostałej połowy klocków trzecią część przeznaczy na budowę domku dla zwierząt, zaś z reszty klocków weźmie czwartą część, z której dobuduje latarnię. Zostało mu osiem klocków, które odłożył do pudełka. Ile klocków ma łącznie Franek?

A. 96 B. 48 C. 42 D. 32

ZADANIE 4.

Bartek jest trzy razy młodszy od swojego ojca. Osiem lat temu ojciec Bartka był od niego starszy pięć razy. Ile w sumie będą mieli lat, gdy ojciec będzie miał 78 lat? Zakoduj cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

ZADANIE 5.

Całoroczny sprawdzian z matematyki, trwający trzy godziny lekcyjne, zawierał zadania testowe za jeden punkt oraz zadania otwarte za trzy punkty. Zadań otwartych było cztery raz mniej niż testowych. Jasiek ze sprawdzianu otrzymał 70 punktów na 70 możliwych. Ile było zadań testowych na sprawdzianie?

ZADANIE 6.

Wyznacz liczbę dwucyfrową, w której cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności, jeśli wiadomo, że przy dzieleniu tej liczby przez sumę jej cyfr otrzymamy 6 oraz resztę 3.

ZADANIE 7.

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą k spełniającą warunek, że iloczyn liczby 3 i sumy 20% tej liczby oraz szóstej jej części jest nie mniejszy niż różnica 40% połowy tej liczby oraz liczby 5,8. Zapisz odpowiednią nierówność z jedną niewiadomą.

ZADANIE 8.

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 12 cm, zaś druga przyprostokątna jest o 8 cm krótsza od długości boku pewnego kwadratu. Jaką długość powinna mieć druga przyprostokątna, aby suma długości przyprostokątnych tego trójkąta była nie większa od długości przekątnej tego kwadratu? Zapisz odpowiednią nierówność z jedną niewiadomą. Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą warunki zadania.

KARTA PRACY 8.4. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI LINIOWE Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

ZADANIE 1.

Podaną nierówność $\frac{\sqrt{3}}{4}x-\sqrt{3}y-y<5$ spełnia para liczb (x,y):

A. $\left(\sqrt{3},-2\right)$ B. $\left(-\sqrt{3},-3\right)$ C. $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$ D. $\left(\sqrt{3},-\frac{6}{5}\right)$

ZADANIE 2.

Para liczb $\left(2-3k,\sqrt{5}k-2\right)$, gdzie $k\in\mathbb{R}$, spełnia podaną równość $-4x+2\left(\sqrt{5}+4\right)y=-13$. Wówczas:

A. $k=-\frac{3}{4}$ B. $k=-\frac{1}{4}$ C. $k=\frac{1}{4}$ D. $k=\frac{1}{2}$

ZADANIE 3.

Para liczb (a,b) spełnia równanie $\frac{1}{2}x-4+2y=0$. Oblicz $\log_{3a+12b+3}\left(\frac{1}{2}a+2b+5\right)$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Przedstaw ilustrację graficzną podanych równań i nierówności.

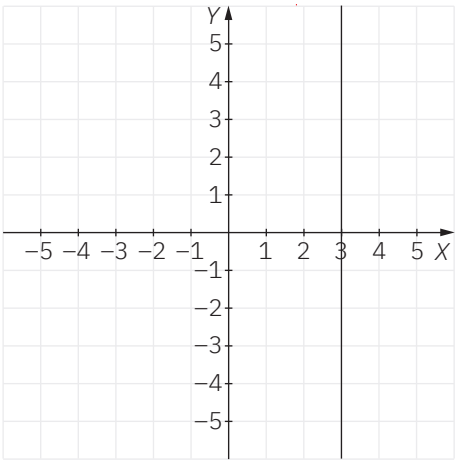
a) $-\frac{3}{4}x+\log_2\frac{1}{6}y=1$ b) $-2y+4x\leq 3$ c) $-3x+6=0$ d) $-\frac{3}{2}+3y\leq 0$

e) $4x\leq -2y$ f) $|x|<3$ g) $|x|-|y|\leq 2$ h) $|x+y|-|x-y|\leq 2$

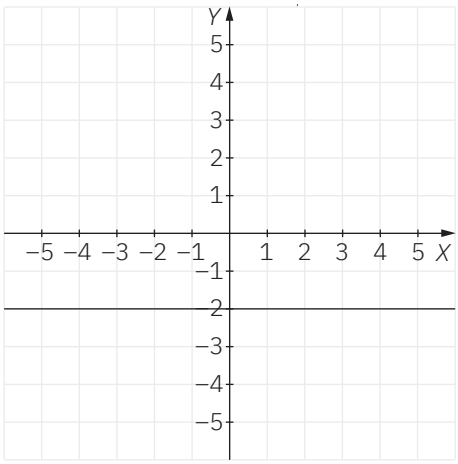
ZADANIE 5.

Zapisz podane rozwiązania graficzne za pomocą równań i nierówności liniowych z jedną lub dwiema niewiadomymi (w podpunktach: *e*, *f*, *g* wykorzystaj wartość bezwzględną).

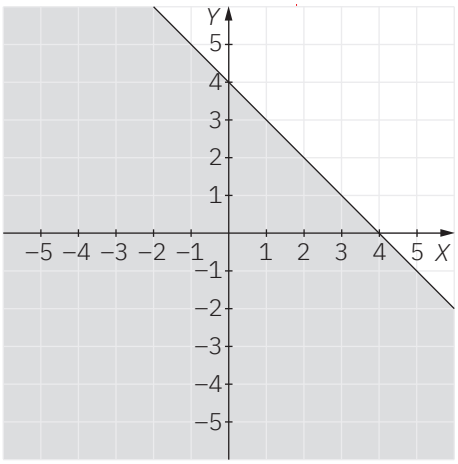
a)



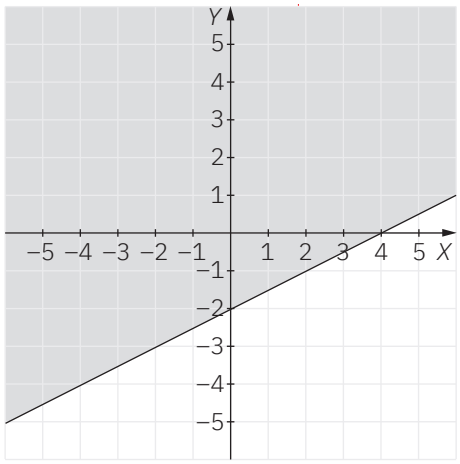
b)



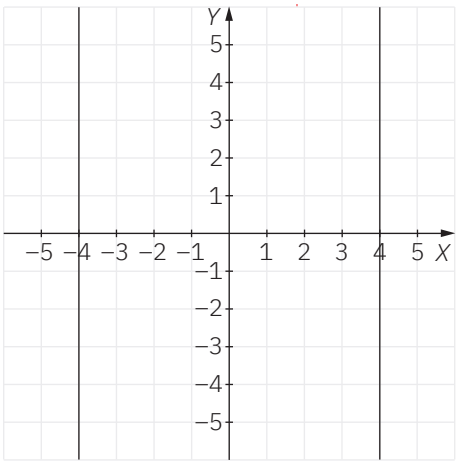
c)


Y
5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 X
−1
−2
−3
−4
−5

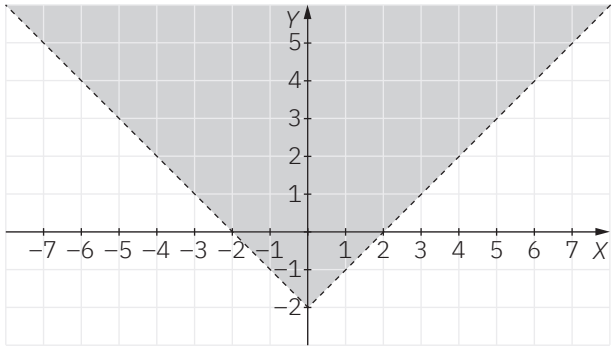
d)


Y
5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 X
−1
−2
−3
−4
−5

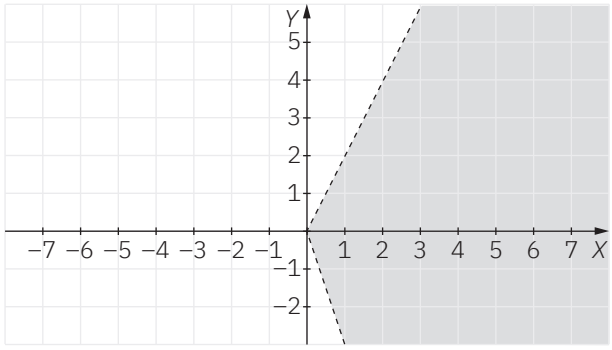
e)


Y
5
4
3
2
1
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 X
−1
−2
−3
−4
−5

f)



g)



KARTA PRACY 8.5. UKŁADY DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

ZADANIE 1.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2-\frac{x-y}{2}=x-4 \\ 2x-\frac{x+y}{4}=1-\frac{y-2x}{2} \end{cases}$ jest:

A. $x=-\frac{8}{3}; y=-4$ B. $x=\frac{8}{3}; y=-4$ C. $x=-\frac{8}{3}; y=4$ D. $x=\frac{16}{8}; y=-4$

ZADANIE 2.

Układ równań $\begin{cases} 2x-5y=6 \\ \left(-\frac{1}{3}+2k\right)x+7y=-\frac{42}{5} \end{cases}$ jest nieoznaczony, gdy:

A. $k=\frac{37}{30}$ B. $k=-1$ C. $k=0$ D. $k=-\frac{37}{30}$

ZADANIE 3.

Układ równań $\begin{cases} -\frac{1}{2}x-\frac{x-y}{4}=1 \\ 3x+\left(-\frac{1}{6}+4k\right)y=-2 \end{cases}$ jest sprzeczny, gdy:

A. $k=-1$ B. $k=-\frac{7}{24}$ C. $k=0$ D. $k=\frac{5}{24}$

ZADANIE 4.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -2x+3y=2-4k \\ 3x+\frac{1}{2}y=6 \end{cases}$ jest para liczb (x,y). Wyznacz wartość k, $k \in \mathbb{R}$, dla której rozwiązanie danego układu spełnia warunek $x-y=1$. Zakoduj trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 5.

Rozwiąż układy równań.

a) $\begin{cases} 5x-6y=11 \\ -2x+3y=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{5}-\frac{x+y}{2}=\frac{1}{10} \\ \frac{y-2x}{3}+\frac{2y+x}{4}=-\frac{5}{12} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2-|x+3|=y \\ 2y-4x=3 \end{cases}$

ZADANIE 6.

Podaj liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 2x+3y=2-k \end{cases}$ z niewiadomymi x, y oraz parametrem $k, k \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 7.

Dla jakich wartości parametru a rozwiązanie układu $\begin{cases} 3x-6y=2+a \\ -2x+5y=a-1 \end{cases}$ spełnia warunek $|3x-6y-1|\leq 6$?

ZADANIE 8.

Wyznacz wartości a,b tak, aby wykresy równań $y=2ax-5b$ oraz $y=-ax+3b-1$ przecinały się w punkcie $P\left(-1, 2+\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{125}\right)$.

KARTA PRACY 8.6. ZADANIA PROWADZĄCE DO UKŁADÓW DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

ZADANIE 1.

Potrojona suma dwóch liczb jest równa czwartej części różnicy tych liczb. Jeśli pierwszą z tych liczb podzielimy przez dwa, zaś drugą przez trzy, to suma otrzymanych liczb będzie równa połowie sumy połowy pierwszej liczby i połowy liczby 6. Układ równań opisujący powyższe warunki jest postaci:

A. $\begin{cases} 3(x+y)=4(x-y) \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right) \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3(x+y)=\frac{1}{4}(x-y) \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right) \end{cases}$ C. $\begin{cases} 3(x+y)=\frac{1}{4}(x-y) \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+3\right) \end{cases}$ D. $\begin{cases} 3(x-y)=\frac{1}{4}(x+y) \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-3\right) \end{cases}$

ZADANIE 2.

Suma dwóch liczb naturalnych dodatnich jest równa 12. Jeśli pierwszą z tych liczb podzielimy przez drugą z nich, to w wyniku dzielenia otrzymamy iloraz 1 oraz resztę 2. Suma kwadratów tych liczb jest równa:

A. 144 B. 100 C. 78 D. 74

ZADANIE 3.

Suma 15% liczby x oraz 20% liczby y jest równa 10,8, natomiast suma 10% liczby y oraz 25% liczby x jest równa 12,4. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{x}{y}$. Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

ZADANIE 4.

Towar ważący 128 ton przewieziono ciężarówkami o ładowności 8 ton oraz 12 ton. Ile było ciężarówek 8-tonowych i 12-tonowych, jeśli wiadomo, że każda z ciężarówek była załadowana do maksymalnej ładowności?

ZADANIE 5.

Aleksander i Franciszek mają razem 22 lata. Za 4 lata Franek będzie dwa razy młodszy od Aleksandra. Ile lat obecnie ma każdy z nich?

ZADANIE 6.

Statek ratowniczy „HERMAN" Rejonowego Płockiego WOPR porusza się z prądem rzeki Wisły z Warszawy do Płocka ze stałą prędkością 74 km/h, pod prąd (z Płocka do Warszawy) ten sam statek porusza się ze stałą prędkością 62 km/h. Jaka jest prędkość prądu rzeki?

ZADANIE 7.

W wyniku dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr otrzymamy 7 oraz resztę 3. Jeśli zaś tę samą liczbę podzielimy przez cyfrę jedności, to w wyniku tego działania otrzymamy 23 oraz resztę 2. Wyznacz tę liczbę.

ZADANIE 8.

W drużynie szczypiornistów średni wiek wynosi 21 lat. Najmłodszy zawodnik ma 14 lat, a średnia wieku pozostałych zawodników jest równa 22 lata. Ilu szczypiornistów liczy ta drużyna?

ZADANIE 9.

Jeżeli trzycyfrową liczbę naturalną nieparzystą podzielną przez 5 podzielimy przez jej cyfrę dziesiątek, to otrzymamy 48 oraz resztę 1. Jeśli natomiast pomiędzy cyfrę dziesiątek i jedności wstawimy cyfrę 6, to otrzymamy liczbę o 3480 większą od wyjściowej liczby. Wyznacz tę liczbę trzycyfrową.

KARTA PRACY 8.7. UKŁADY NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

ZADANIE 1.

Punkt $P(-1, 1-3k)$, $k \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem układu nierówności $\begin{cases} 2x-4y<6 \\ x+\frac{1}{2}y-2<0 \end{cases}$. Wówczas:

A. $k \in (-\infty, 1)$

B. $k \in \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

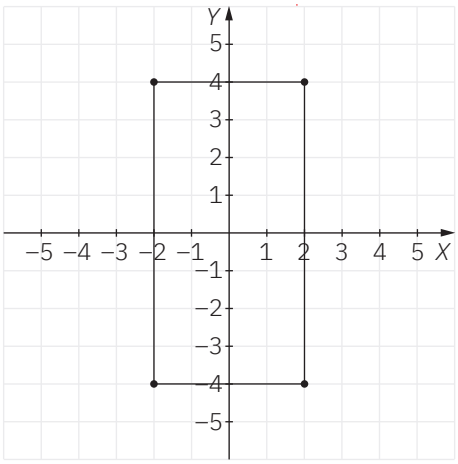
C. $k \in \left\langle -1, \frac{5}{3} \right\rangle$

D. $k \in \left(-1, -\frac{3}{5}\right)$

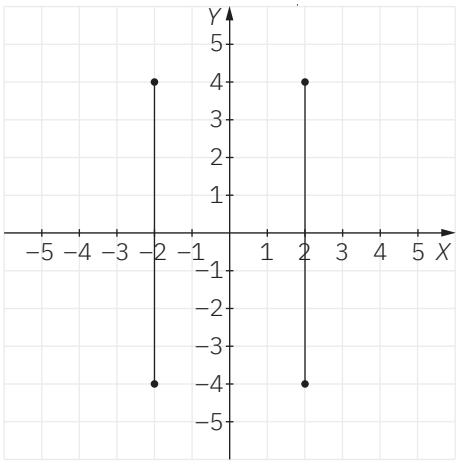
ZADANIE 2.

Ilustrację graficzną rozwiązania układu $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| = 4 \end{cases}$ przedstawia rysunek:

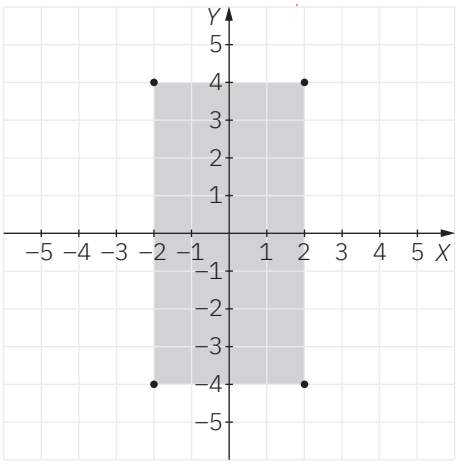
A.



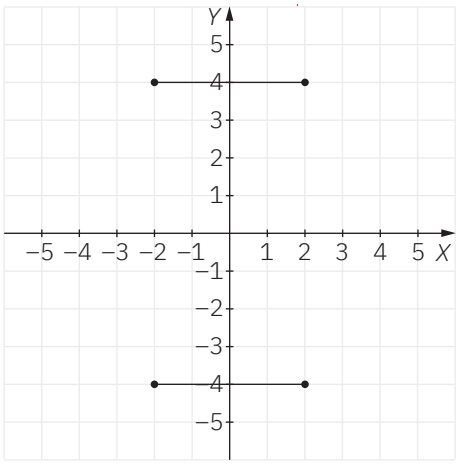
B.



C.



D.



ZADANIE 3.

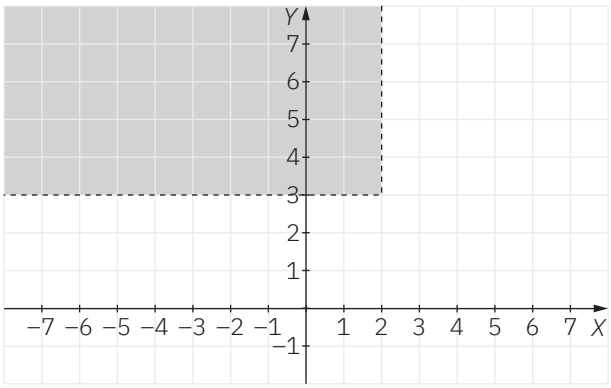
Przedstaw ilustracje graficzne (w układzie współrzędnych) podanych układów:

a) $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ -x + 2y < 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x > 2 \\ y \le 4 \\ x + y \ge 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x + y| \le 4 \\ |x - y| > 2 \end{cases}$

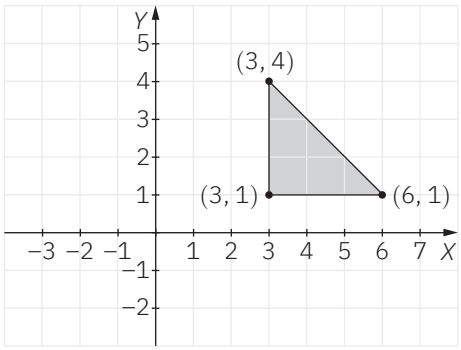
ZADANIE 4.

Opisz za pomocą nierówności zaznaczone obszary:

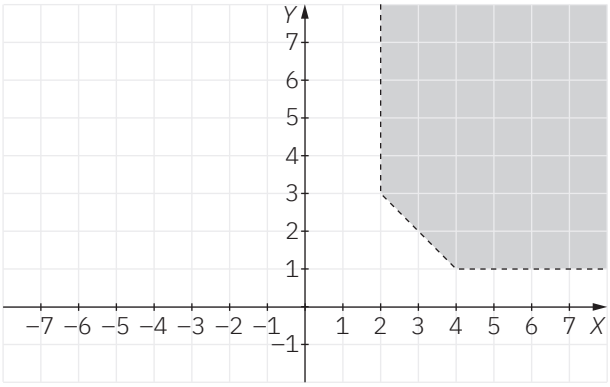
a)



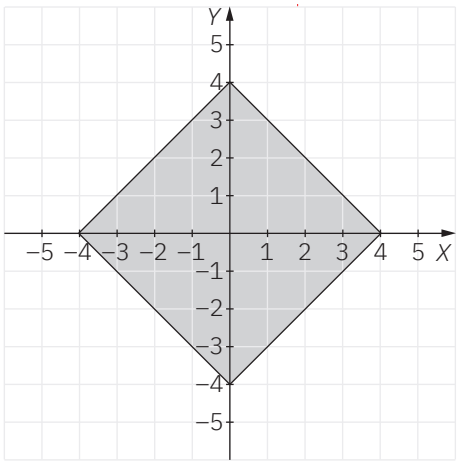
b)



c)



d)



ZADANIE 5.

Jakie warunki muszą spełniać współrzędne punktu $K(x, y)$, aby punkt ten leżał wewnątrz trójkąta ABC, gdzie $A(-5,1)$, $B(-1,5)$, $C(4,-2)$?

ZADANIE 1.

Wartość największa funkcji $f(x_1, x_2) = 1000x_1 + 2000x_2$ przy warunkach ograniczających $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ jest równa:

A. 4000 B. 6000 C. 7000 D. 8000

ZADANIE 2.

Funkcja $f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$ przy warunkach ograniczających $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$ osiąga najmniejszą wartość równą (-3) w punkcie:

A. $(1,3)$ B. $(0,3)$ C. $(3,1)$ D. $(3,0)$

ZADANIE 3.

Pan Wincenty prowadzi firmę, która produkuje bramy wjazdowe oraz furtki. Każdego dnia jeden z pracowników jest w stanie stworzyć dwie bramy, a drugi z pracowników może wykonać trzy furtki. Jednak maszyna spawalnicza jest w stanie wykonać tylko do czterech produktów dziennie (bez znaczenia, czy to brama, czy furtka). Pan Wincenty, wiedząc, że brama generuje zysk 1500 zł, a furtka 1000 zł, chciałby tak wyznaczyć tempo produkcji, aby zmaksymalizować zysk ze sprzedaży. Ile produktów i którego rodzaju powinna wytworzyć firma pana Wincentego, aby uzyskać największy zysk ze sprzedaży?

ZADANIE 4.

Pewna firma produkuje dwa rodzaje materiałów budowlanych: P_1 i P_2. Do produkcji tych materiałów są stosowane dwa składniki: A i B. Największe dostępne dziennie ilości tych składników wynoszą odpowiednio 6 i 8 ton, a wartości ich zużycia na jedną tonę odpowiedniego produktu znajdują się w poniższej tabeli.

Składnik	Zużycie składnika w tonach na tonę produktu		Największa dostępna dziennie ilość składnika
	Produkt P_1	Produkt P_2	
A	1	2	6
B	2	1	8

Badanie rynku pokazało, że dzienny popyt na produkt P_2 nie przewyższa popytu na produkt P_1 o więcej niż 1 tonę, a popyt na produkt P_2 nigdy nie przekracza 2 ton na dobę. Cena jednej tony produktów P_1 oraz P_2 wynosi odpowiednio 300 zł oraz 200 zł. Jakie ilości produktów P_1 i P_2 należy wyprodukować, aby dochód z tej produkcji był największy?

KARTA PRACY 8.9. KARTA POWTÓRZENIOWA

ZADANIE 1.

Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty $A\left(2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$ oraz $B\left(\sqrt{3}+4, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, jest równy:

A. $\frac{3-2\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{3}-4}{4}$ C. $8-2\sqrt{3}$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{16}$

ZADANIE 2.

Miejscem zerowym funkcji $f(x)=2-\left[1-\frac{2}{3}(6x-12)\right]+3x$ jest liczba:

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

ZADANIE 3.

Wykres funkcji $f(x)=2x+4-\left(2\sqrt{3}-3k+2\right)x$ jest nachylony do osi Ox pod kątem $150°$ dla:

A. $k=-\sqrt{3}$ B. $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $k=\frac{\sqrt{3}}{9}$ D. $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ZADANIE 4.

Punkty $P\left(\frac{1}{2}a-b, a-2b-1\right)$ i $F(-b, a+b-10)$ należą do wykresu funkcji $f(x)=-\frac{1}{2}x+4$. Wówczas liczba $\log_{b^2-7}(2a+3)$ jest równa:

A. -3 B. $-0,(3)$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

ZADANIE 5.

Niech $f(x)=(1-|p+6|)x-p^2+5$. Wyznacz wartość p, $p\in\mathbb{R}$, dla której funkcja ta jest malejąca i przecina oś Oy w punkcie o rzędnej (-21). Zakoduj cyfrę jedności oraz dwie początkowe cyfry po przecinku otrzymanego wyniku.

ZADANIE 6.

Wyznacz wzór funkcji liniowej $f(x)=ax+b$, wiedząc, że wykres tej funkcji jest nachylony do osi Ox pod kątem α takim, że $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, oraz że funkcja ta przyjmuje wartości ujemne tylko w przedziale $(-2,+\infty)$.

ZADANIE 7.

Wyznacz wzór funkcji liniowej $f(x)=ax+b$, która spełnia następujący warunek $f(6-3x)=4x+5$.

ZADANIE 8.

Dane są funkcje $f(x)=-6x+18p+24$ oraz $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}p+1$. Wyznacz p, $p\in\mathbb{R}$, tak aby miejsce zerowe funkcji f było dwa razy większe od miejsca zerowego funkcji g powiększonego o 1.

ZADANIE 9.

Rozwiąż układ równań $\begin{cases}|x-5|-|3-y|=6\\2x-6y=4\end{cases}$.

ZADANIE 10.

Dany jest wzór funkcji liniowej $f(x)=-\sqrt{2}x+2k-3+x$. Wyznacz wartość k tak, aby miejscem zerowym tej funkcji była liczba nie mniejsza niż $2\sqrt{2}+2$.