
Spis treści

Wstęp	5
I. Funkcje, równania, nierówności	7
1. Układ współrzędnych na płaszczyźnie	7
1.1. Punkt w układzie współrzędnych	7
2. Pojęcie funkcji	9
2.1. Funkcja jako przyporządkowanie	9
2.2. Sposoby przedstawiania funkcji	11
2.3. Własności funkcji liczbowych	16
3. Funkcje liniowe i ich własności	21
3.1. Definicja i wykres funkcji liniowej	21
3.2. Punkty przecięcia z osiami (miejsca zerowe)	25
3.3. Monotoniczność	27
4. Równania i nierówności liniowe	32
4.1. Równania liniowe z jedną niewiadomą	32
4.2. Nierówności liniowe	34
5. Układy równań liniowych	37
5.1. Wprowadzenie	37
5.2. Metoda podstawiania	37
5.3. Metoda przeciwnych współczynników	41
5.4. Metoda graficzna	46
6. Funkcje kwadratowe	49
6.1. Definicja funkcji kwadratowej	49
6.2. Wykres funkcji kwadratowej	50
6.3. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej	52
6.4. Postać iloczynowa i miejsca zerowe funkcji kwadratowej	57
7. Równania i nierówności kwadratowe	61
7.1. Wprowadzenie	61
7.2. Równania kwadratowe	62
7.3. Wzory Viète'a	65
7.4. Wartości dodatnie i ujemne funkcji	68
7.5. Nierówności kwadratowe	70
8. Równania i nierówności stopnia trzeciego – wybrane przypadki	73
8.1. Dzielenie wielomianów	73
8.2. Pierwiastki wielomianu	77
8.3. Rozkład wielomianu na czynniki	79
8.4. Równania stopnia trzeciego	85
8.5. Nierówności trzeciego stopnia	87

II. Stereometria	91
9. Elementy trygonometrii	91
9.1. Wielkości trygonometryczne kąta ostrego	91
9.2. Praktyczne zastosowania trygonometrii	96
10. Przestrzeń trójwymiarowa	101
10.1. Stereogramy	101
10.2. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni	101
10.3. Kąt między prostą a płaszczyzną	105
10.4. Kąt dwuścienny	107
11. Wielościany	109
11.1. Klasyfikacja wielościanów	109
11.2. Siatki wybranych wielościanów	115
11.3. Pole powierzchni graniastopuła i ostrostopuła	116
11.4. Objętość graniastopuła i ostrostopuła	120
12. Bryły obrotowe	129
12.1. Wprowadzenie	129
12.2. Siatki walca i stożka	130
12.3. Pole powierzchni i objętość walca, stożka i kuli	133
III. Elementy statystyki	140
13. Sposoby prezentacji danych	140
13.1. Wprowadzenie	140
13.2. Diagram kolumnowy (pionowy)	140
13.3. Diagram słupkowy (poziomy)	142
13.4. Diagram kołowy	144
13.5. Wykres punktowy	146
13.6. Wykres liniowy	148
14. Wybrane wartości średnie	149
14.1. Średnia arytmetyczna	149
14.2. Moda i mediana	150
IV. Test końcowy	152

I. Funkcje, równania, nierówności

1. Układ współrzędnych na płaszczyźnie

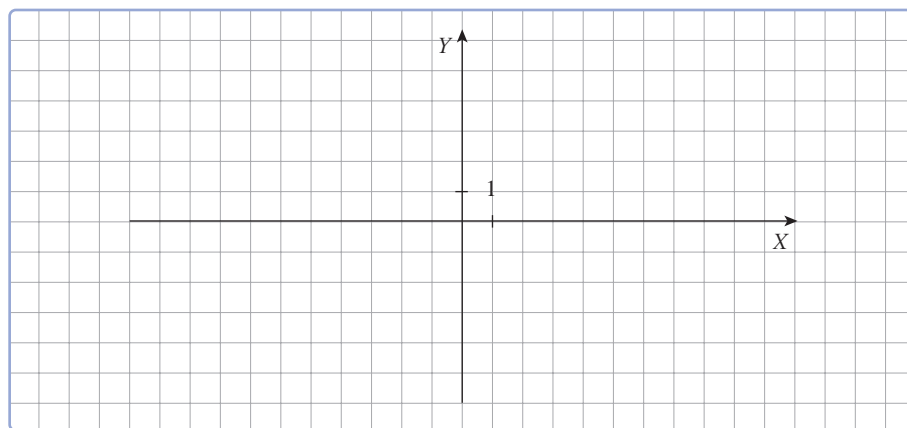
1.1. Punkt w układzie współrzędnych

2. Uzupełnij zdanie.

Na płaszczyźnie dowolny punkt ma współrzędne. Pierwsza z nich odnosi się do osi , a druga do osi

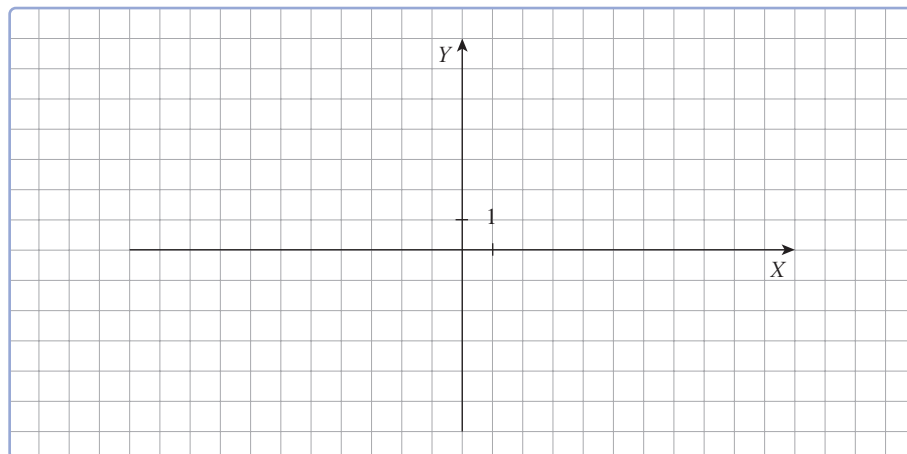
2. Zaznacz dane punkty w narysowanym układzie współrzędnych:

$$A = (1; 4), B = (-3; 5), C = (-1; -5), D = (7; -2), E = (5; 5), F = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$



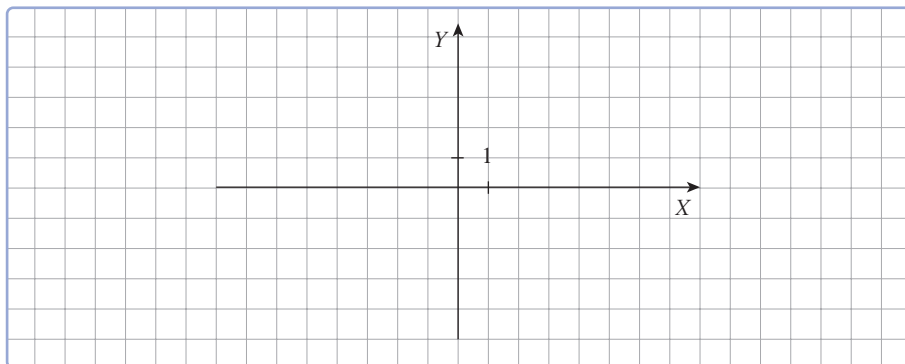
3. Zaznacz dane punkty w narysowanym układzie współrzędnych:

$A = (1; 4)$, $B = (1; 5)$, $C = (1; -5)$, $D = (1; -2)$, $E = (1; -3)$, $F = \left(1; -\frac{1}{2}\right)$. Jaką figurę tworzą wszystkie punkty, których odcięta wynosi 1?

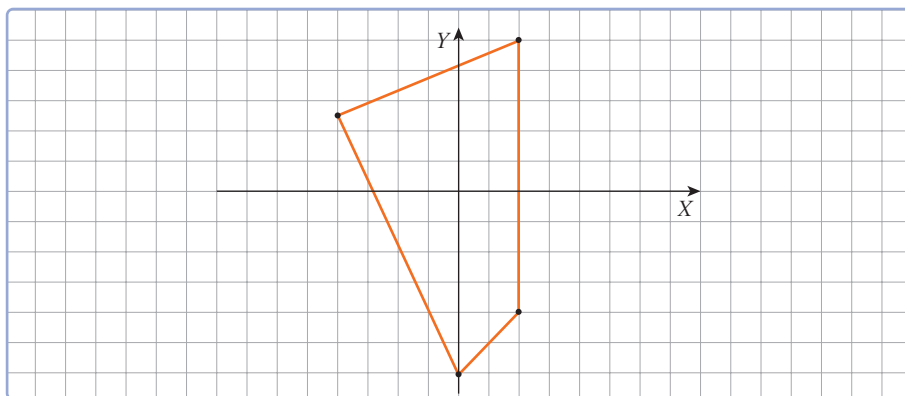


4. Zaznacz dane punkty w narysowanym układzie współrzędnych:

$A = (1; 4)$, $B = (-1; 4)$, $C = (2; 4)$, $D = (-3; -4)$, $E = (-5; 4)$, $F = \left(-\frac{1}{2}; 4\right)$. Jaką figurę tworzą wszystkie punkty, których rzędna wynosi 4?



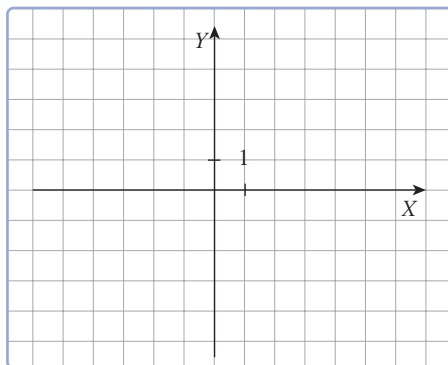
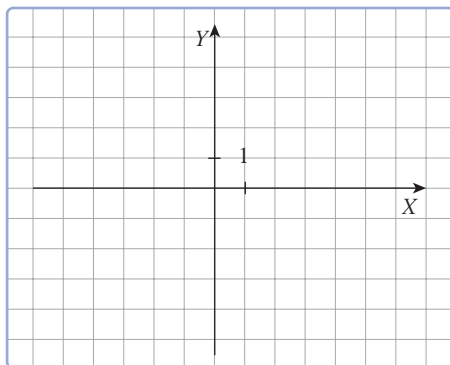
5. Z podanego rysunku odczytaj współrzędne wierzchołków czworokąta.



6. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których:

a) odcięta jest większa od (-3) ,

b) rzędna jest mniejsza od 4.



2. Pojęcie funkcji

2.1. Funkcja jako przyporządkowanie

1. Uzupełnij definicję.

Funkcją f (odwzorowaniem) ze zbioru X w zbiór Y nazywamy

.....

.....

Zbiór X to

Zbiór wszystkich wartości funkcji nazywamy

2. Uzupełnij tabelę, wpisując w wolne miejsca odpowiedzi na pytanie: Czy dane przyporządkowanie jest funkcją? Jeżeli jest funkcją, to wpisz dziedzinę i zbiór wartości.

Lp.	Przyporządkowanie	Czy jest to funkcja?	Dziedzina	Zbiór wartości
1.	Każdemu uczniowi drugiej klasy przyporządkowujemy rok jego urodzenia.			
2.	Każdemu człowiekowi przyporządkowujemy jego siostrę.			
3.	Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy liczbę przeciwną.			
4.	Każdemu psu przyporządkowujemy kolor jego sierści.			
5.	Każdemu państwu przyporządkowujemy jego stolicę.			
6.	Każdemu przedmiotowi, którego aktualnie się uczysz, przyporządkowujemy pierwszą literę nazwy tego przedmiotu.			
7.	Każdej liczbie całkowitej przyporządkowujemy liczbę podwojoną.			





Lp.	Przyporządkowanie	Czy jest to funkcja?	Dziedzina	Zbiór wartości
8.	Każdej liczbie dodatniej przyporządkowujemy liczbę 1, a każdej liczbie ujemnej liczbę -1 .			
9.	Każdej uczennicy w twojej klasie przyporządkowujemy jej ocenę z matematyki z ostatniego sprawdzianu.			
10.	Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy jej kwadrat.			

3. Wymyśl funkcję, która podany zbiór X przekształci w zbiór Y , jeśli:

a) X – zbiór chłopców w twojej klasie, Y – zbiór liczb dodatnich

b) X – zbiór liczb naturalnych, Y – zbiór liczb naturalnych

c) X – zbiór miesięcy w roku, Y – zbiór liter w alfabecie

d) X – zbiór miejscowości w Polsce, Y – zbiór liczb naturalnych

e) X – zbiór owoców, Y – zbiór drzew

2.2. Sposoby przedstawiania funkcji**1. Wymień główne sposoby określania funkcji.**

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

2. Przedstaw opisaną słownie funkcję f za pomocą grafu, zbioru par oraz tabeli, jeśli:

- a) f – liczbom 1, 2, 3, 4, 5 przyporządkowujemy liczby trzy razy większe
I.

II. $f = \{ \dots \}$

III.

x					
$f(x)$					

- b) f – liczbom $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ przyporządkowujemy liczbę $\sqrt{3}$

I.

II. $f = \{ \dots \}$





III.

x						
$f(x)$						

c) f – liczbom $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ przyporządkowujemy ich odwrotność

I.

II. $f = \{ \dots \}$

III.

x					
$f(x)$					

3. Podaj wzór funkcji, jeśli dana jest tabela wartości:

a)

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = f(x)$	2	4	8	16	32	64	128

$f(x) = \dots$

b)

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = f(x)$	5	6	7	18	9	10	11

$f(x) = \dots$

c)

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = f(x)$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

$f(x) = \dots$

d)

x	1	2	3	4	5	6	7
$y=f(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

e)

x	1	2	3	4	5	6	7
$y=f(x)$	100	200	300	400	500	600	700

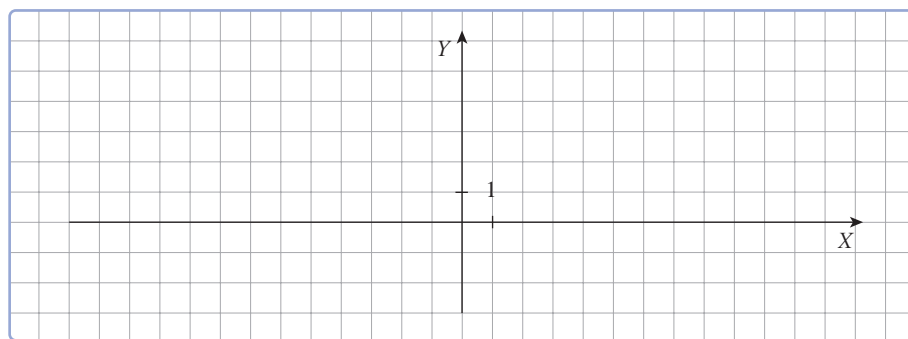
$$f(x) = \dots\dots\dots$$

4. Uzupełnij definicję.

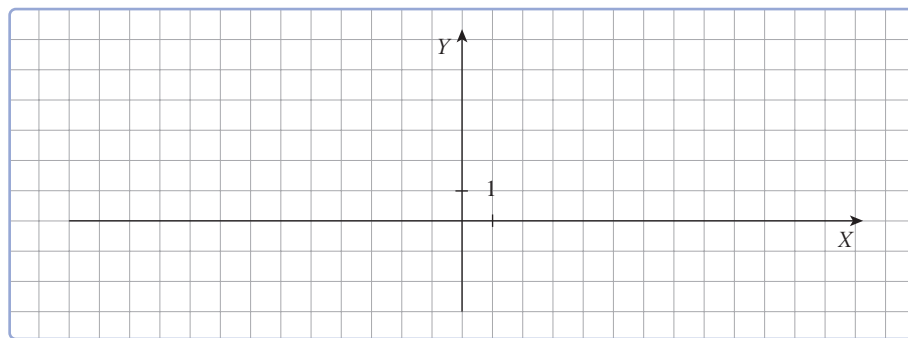
Wykresem funkcji rzeczywistej f nazywamy

5. Naszkicuj wykres funkcji opisanej słownie:

a) liczbom naturalnym mniejszym od 10 przyporządkowujemy liczbę zmniejszoną o 3

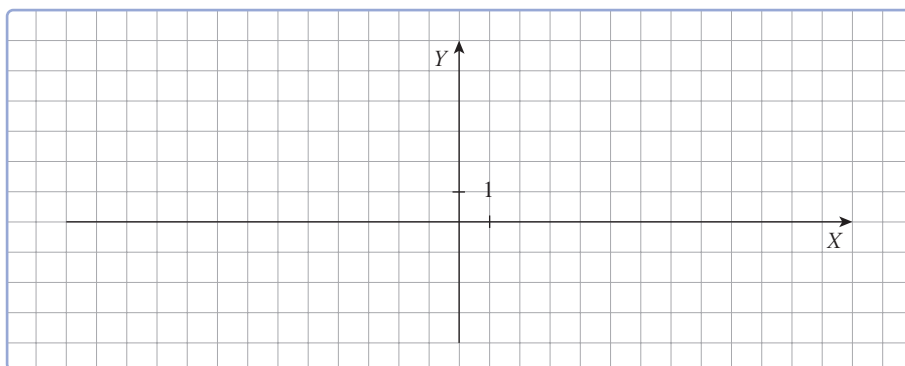


b) liczbom naturalnym mniejszym od 7 przyporządkowujemy ich największy dzielnik





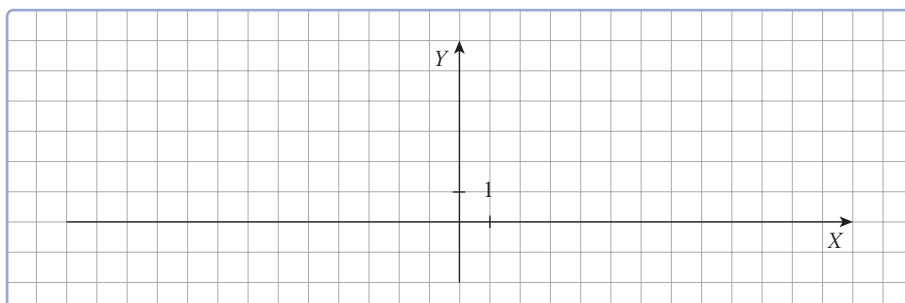
c) liczbom całkowitym między (-4) a 4 przyporządkowujemy ich wartość bezwzględną



6. Naszkicuj wykresy funkcji danych za pomocą tabeli.

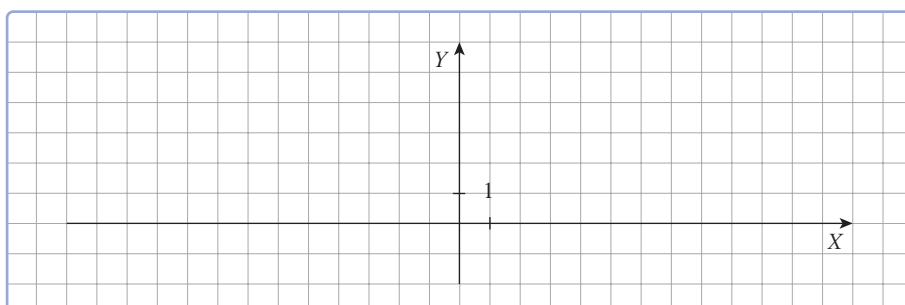
a)

x	1	2	3	4
$y = f(x)$	1	2	3	4



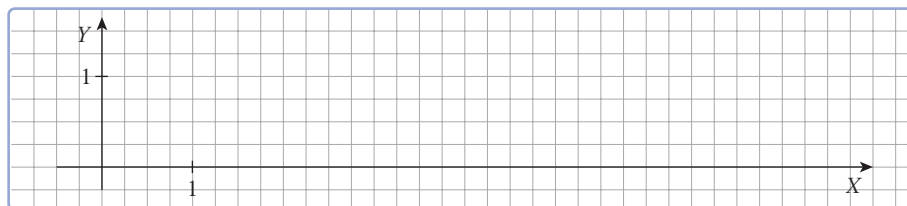
b)

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	3	3	3	3	3	3



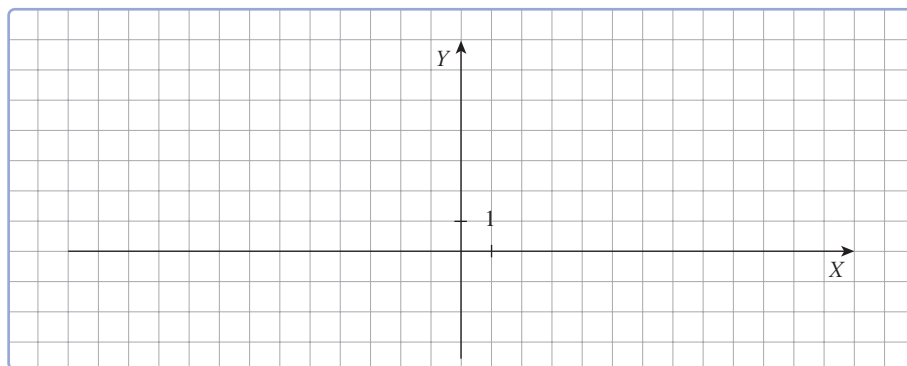
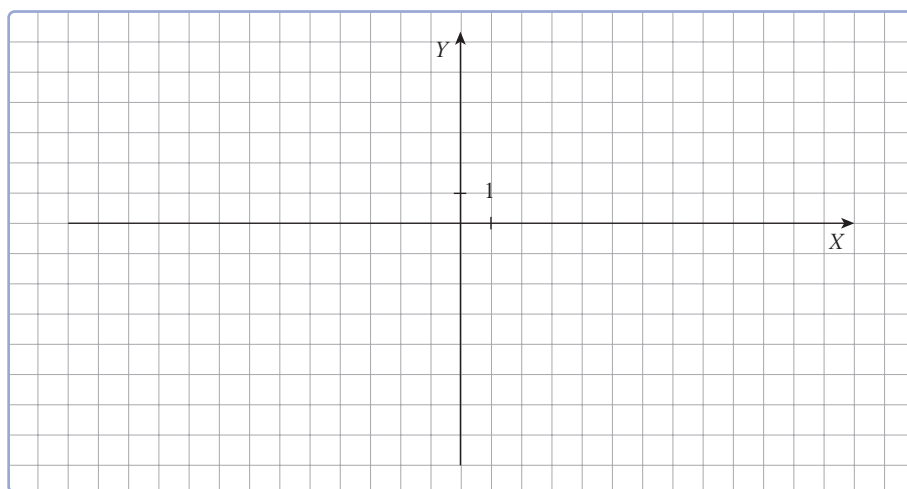
c)

x	2	4	6	8
$y=f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$



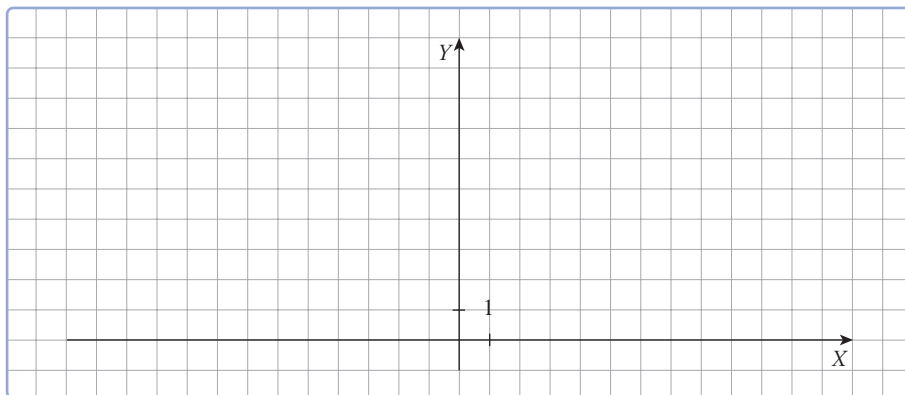
d)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=f(x)$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

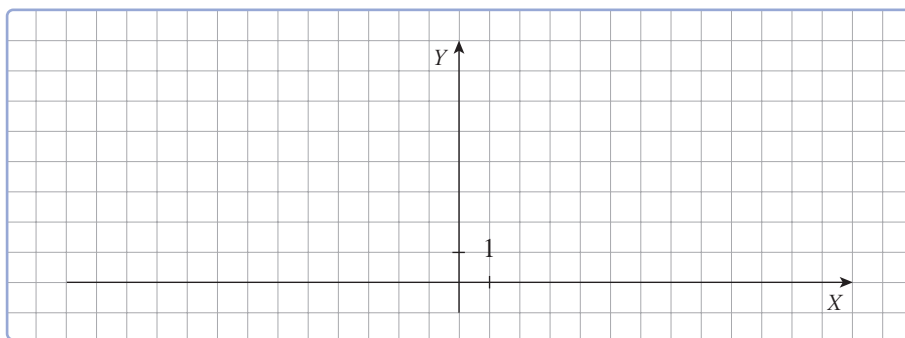
**7. Naszkicuj wykresy funkcji danych wzorem:**a) $f(x) = -2x$, $x \in \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ 



b) $f(x) = x^2, x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$



c) $f(x) = \frac{4}{x}, x \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8\right\}$



2.3. Własności funkcji liczbowych

1. Uzupełnij zdania.

a) Miejscem zerowym funkcji nazywamy

.....

b) Funkcja f jest rosnąca w zbiorze X , jeśli

.....

.....

.....

c) Funkcja f jest malejąca w zbiorze X , jeśli

.....

.....

.....

.....

.....

.....

d) Funkcja f jest stała w zbiorze X , jeśli

.....

.....

.....

e) Funkcja f jest monotoniczna w zbiorze X , jeśli

.....

f) Funkcja f jest różnowartościowa w zbiorze X , jeśli

.....

.....

2. Dane są funkcje zapisane w różnych postaciach. Podaj ich miejsca zerowe oraz określ monotoniczność.

a) $f(x) = \{(-5; 0), (-3; 1), (-1; 4), (3; 5), (7; 12)\}$

.....

b) $f(x) = \{(-5; 4), (-3; 1), (-1; -4), (3; -5), (7; -11)\}$

.....

c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$

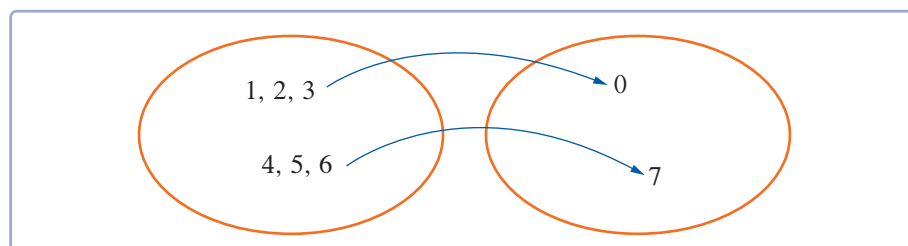
.....

d)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	-2	0	-3	0	-4	0	-5	0	-6	0

.....

e)

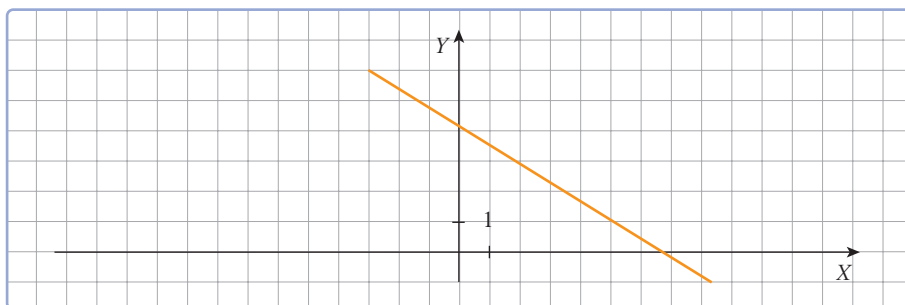


.....

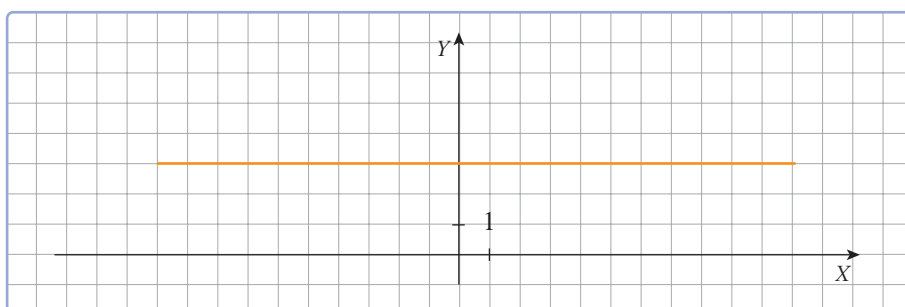




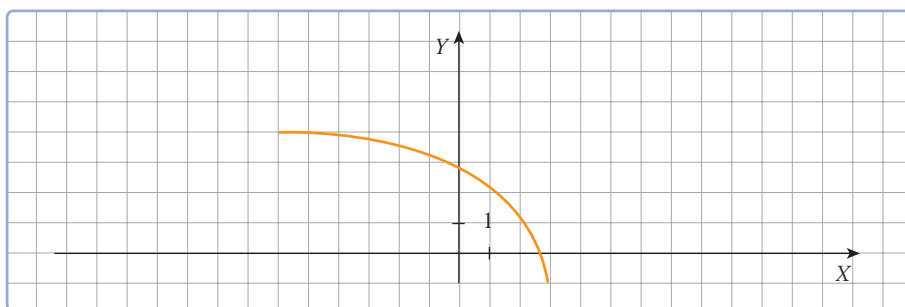
f)



g)



h)



3. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = 3x - 9$

b) $f(x) = -2x - 19$

c) $f(x) = x^2 - 9$

.....

.....

d) $f(x) = -4x^2 + 25$

.....

.....

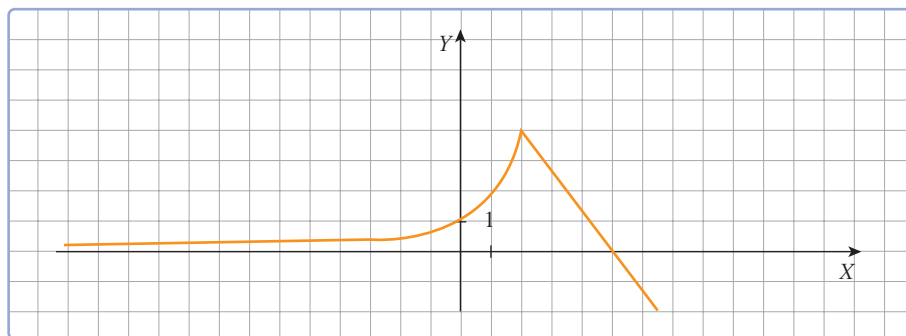
e) $f(x) = x^2 + 2$

.....

.....

4. Z naszkicowanego wykresu funkcji odczytaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, wartość największą i najmniejszą.

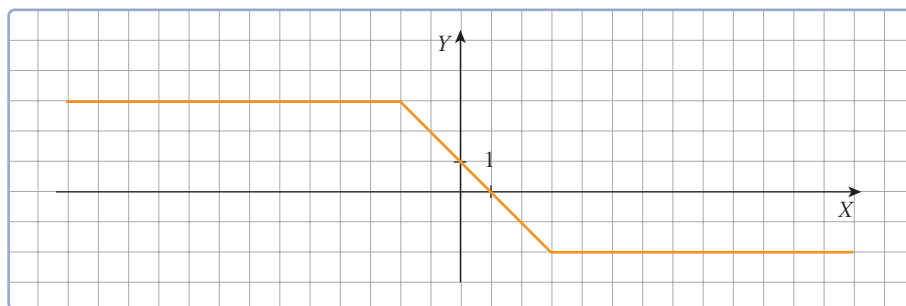
a)



.....

.....

b)



.....

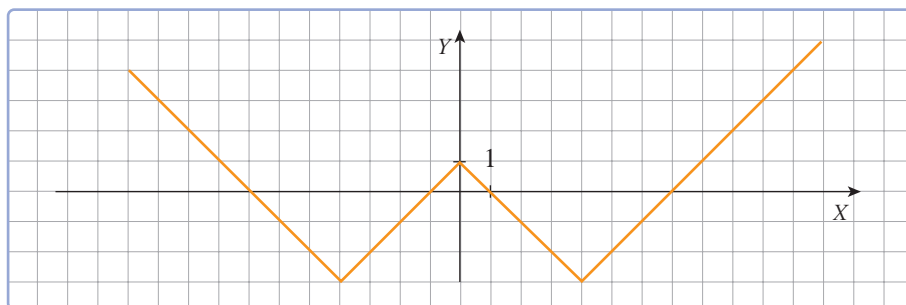
.....

.....

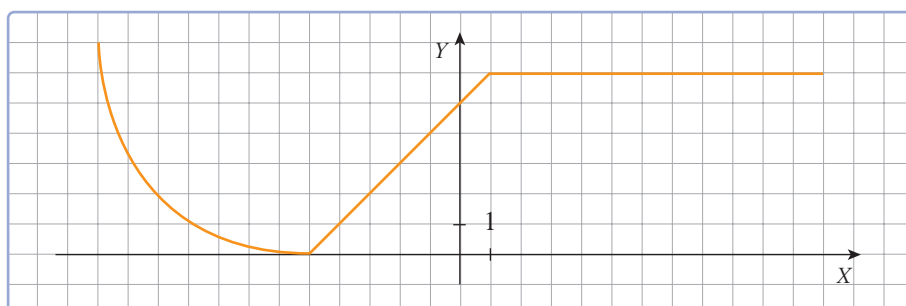




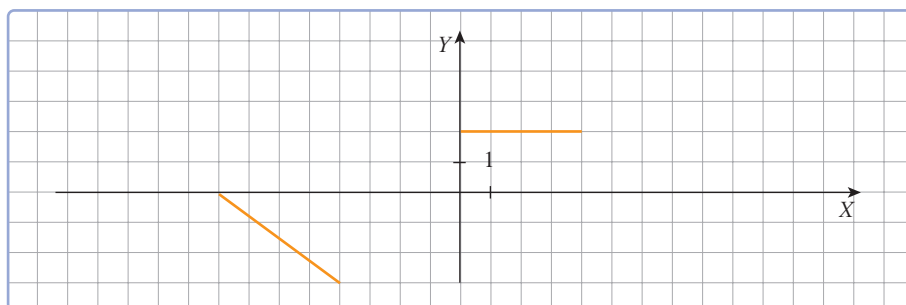
c)



d)



e)



3. Funkcje liniowe i ich własności

3.1. Definicja i wykres funkcji liniowej

1. Uzupełnij definicję.

Funkcją liniową f nazywamy

.....

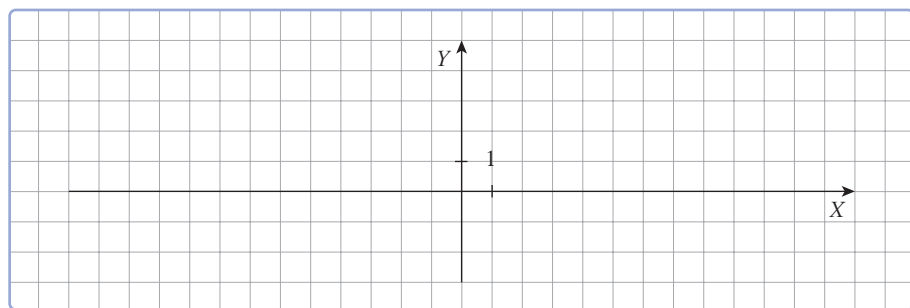
Wykres funkcji liniowej jest linią

Liczbę a nazywamy,

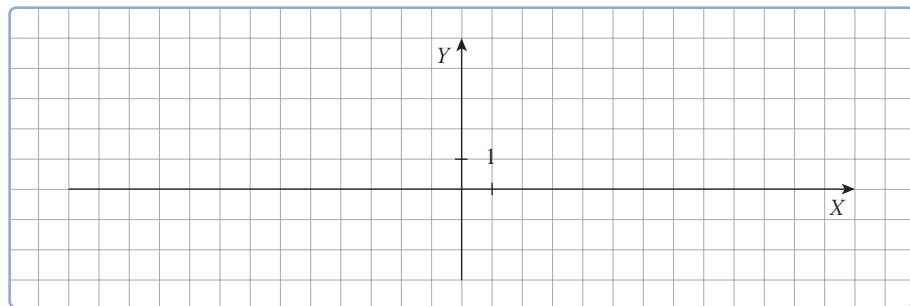
zaś liczba b to

2. Mając dane współczynniki funkcji liniowych, naszkicuj ich wykresy.

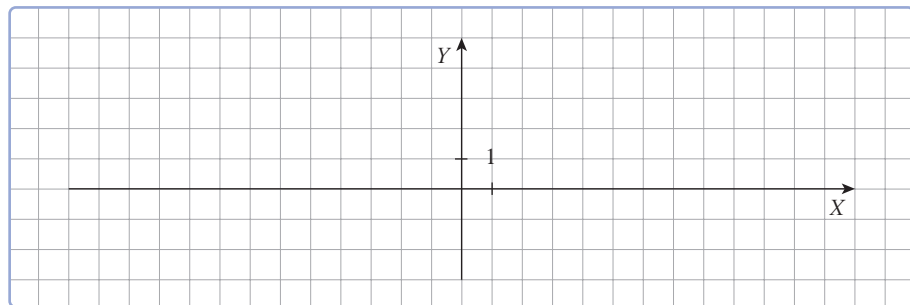
a) $a = -1$, $b = 3$



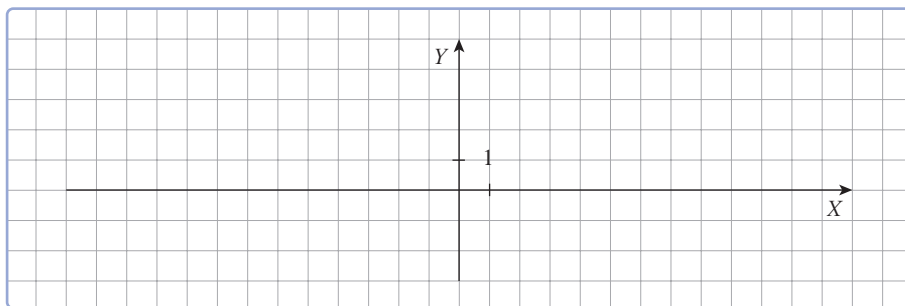
b) $a = 1$, $b = -3$



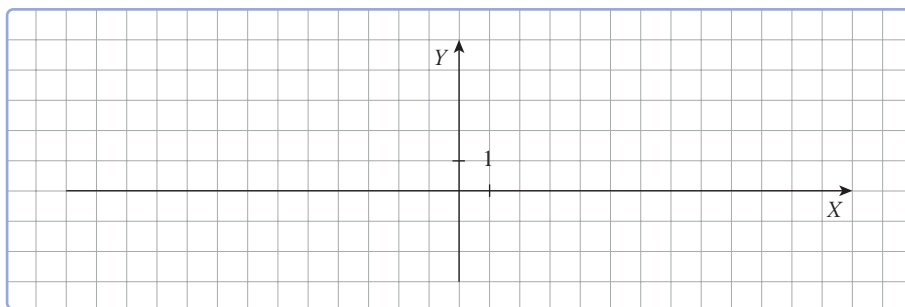
c) $a = 0$, $b = 2$



►► d) $a = \frac{1}{3}, b = 0$

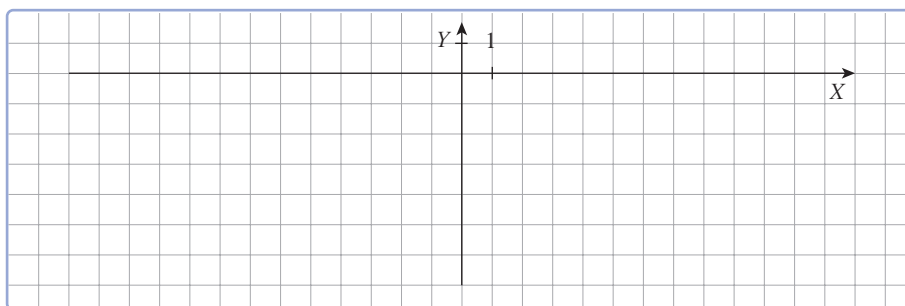


e) $a = 0, b = 0$

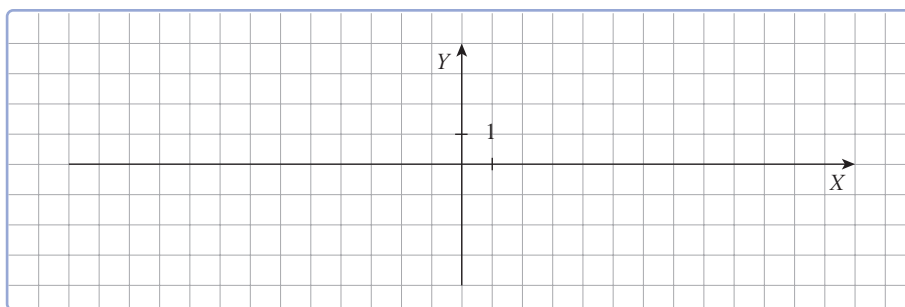


3. Naszkicuj wykresy funkcji w podanych zbiorach.

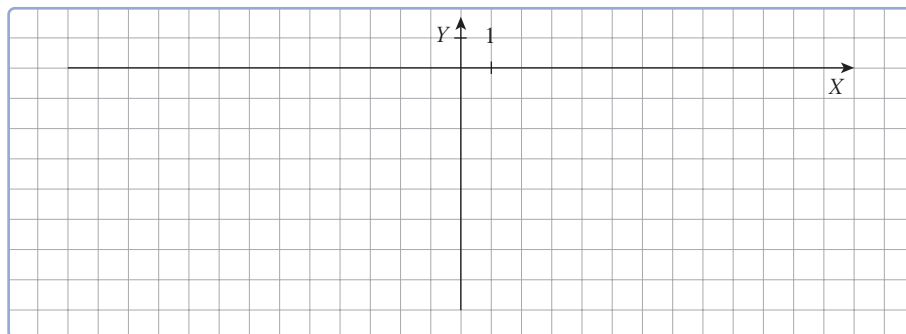
a) $f(x) = x - 4 \wedge x \in \langle -3, 3 \rangle$



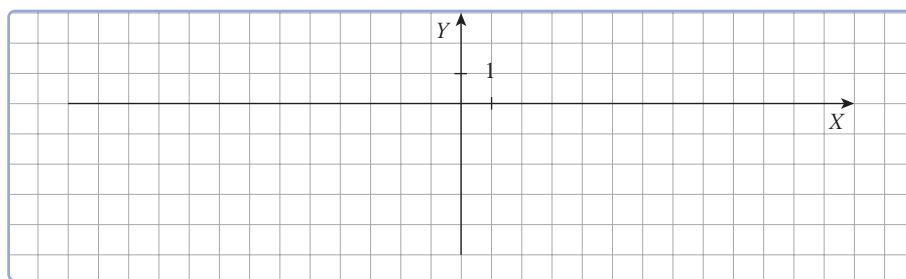
b) $f(x) = \frac{2}{3}x \wedge x \in \{-6, -3, 0, 3, 6\}$



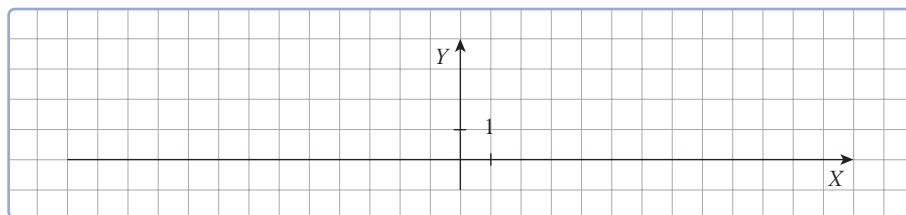
c) $f(x) = -2x + 1 \wedge x \in (-1, +\infty)$



d) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1 \wedge x \in \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$



e) $f(x) = 3 \wedge x \in (-4, 5)$



4. Uzupełnij tabelę, wpisując brakujące wartości argumentów lub wartości funkcji.

Lp.	Wzór funkcji	Wartość argumentu x_0	Obliczenia	Wartość funkcji $f(x_0)$
1.	$f(x) = 4x - 12$	-3		
2.	$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$	6		





Lp.	Wzór funkcji	Wartość argumentu x_0	Obliczenia	Wartość funkcji $f(x_0)$
3.	$f(x) = 7$	$\sqrt{3}$		
4.	$f(x) = -x - 4$			6
5.	$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$			0
6.	$f(x) = -\frac{3}{4}x$			-9
7.	$f(x) = \sqrt{2}$			4
8.	$f(x) = 5x + 10$	0,4		
9.	$f(x) = \sqrt{3}x - 3$			-6
10.	$f(x) = -\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}$	3		

3.2. Punkty przecięcia z osiami (miejsca zerowe)**1. Uzupełnij poniższe zdania.**a) Punkt przecięcia wykresu funkcji $f(x) = ax + b$ z osią OY tob) Punkt przecięcia wykresu funkcji $f(x) = ax + b$ z osią OX to

c) Funkcja liniowa może mieć, lub miejsc zerowych.

d) Gdy $a \neq 0$, to funkcja $f(x) = ax + b$ ma miejsce zerowe i jest to liczba**2. Uzupełnij tabelę, wpisując miejsce zerowe (jeżeli istnieje) oraz punkty przecięcia podanej funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych.**

Lp.	Wzór funkcji	Obliczenia	Miejsce zerowe	Punkt przecięcia wykresu z osią OX	Punkt przecięcia wykresu z osią OY
1.	$f(x) = 3x - 3$				
2.	$f(x) = 2x + 7$				
3.	$f(x) = -x - 5$				
4.	$f(x) = \frac{1}{2}x$				





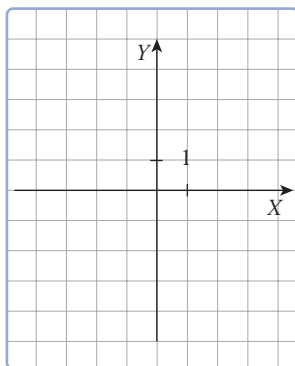
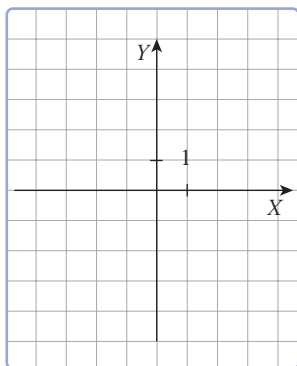
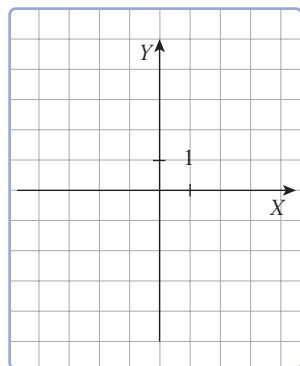
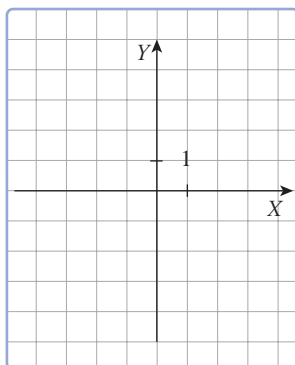
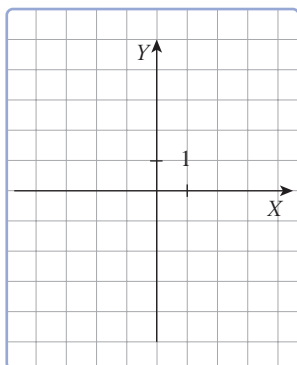
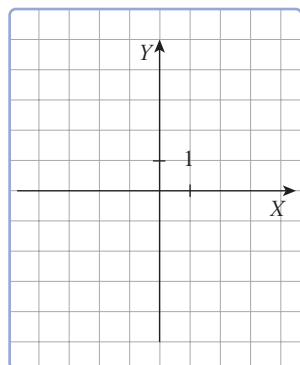
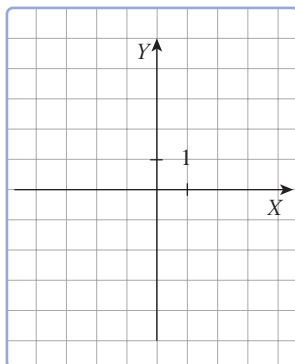
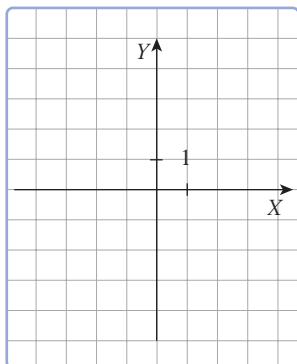
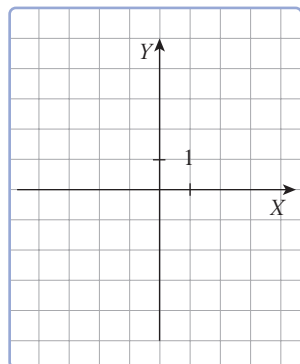
Lp.	Wzór funkcji	Obliczenia	Miejsce zerowe	Punkt przecięcia wykresu z osią OX	Punkt przecięcia wykresu z osią OY
5.	$f(x) = -\frac{1}{5}x + 2$				
6.	$f(x) = 4$				
7.	$f(x) = 0$				
8.	$f(x) = 100x + 200$				
9.	$f(x) = -25x - 75$				
10.	$f(x) = \sqrt{7}x + 1$				

3.3. Monotoniczność**1. Uzupełnij twierdzenia.**

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy

Funkcja liniowa $y = ax + b$ jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy

2. Naskicuj, w których ćwiartkach układu współrzędnych znajduje się wykres funkcji $y = ax + b$, jeśli:a) $a > 0, b > 0$ b) $a > 0, b = 0$ c) $a > 0, b < 0$ d) $a < 0, b = 0$ e) $a < 0, b = 0$ f) $a < 0, b = 0$ g) $a = 0, b > 0$ h) $a = 0, b = 0$ i) $a = 0, b < 0$ 

3. Uzupełnij tabelę.

Lp.	Punkty, przez które przechodzi prosta	Współczynnik kierunkowy	Wzór prostej	Obliczenia	Rosnąca, malejąca czy stała?
1.	$A = (-2; 1),$ $b = (9; 1)$				
2.	$A = (2; 0),$ $B = (5; 3)$				
3.	$A = (-2; -4),$ $B = (1; 4)$				

Lp.	Punkty, przez które przechodzi prosta	Współczynnik kierunkowy	Wzór prostej	Obliczenia	Rosnąca, malejąca czy stała?
4.	$A = (-2; 1)$, $B = (4; -1)$				
5.	$A = (0; 1)$, $B = (9; 0)$				
6.	$A = (-2; -3)$, $B = (9; -3)$				





Lp.	Punkty, przez które przechodzi prosta	Współczynnik kierunkowy	Wzór prostej	Obliczenia	Rosnąca, malejąca czy stała?
7.	$A = (2; 1),$ $B = (4; 1)$				
8.	$A = (5; 1),$ $B = (-3; 1)$				
9.	$A = (0; 1),$ $B = (0; 0)$				
10.	$A = (-6; -6),$ $B = (7; 7)$				

4. Podkreśl funkcje rosnące.

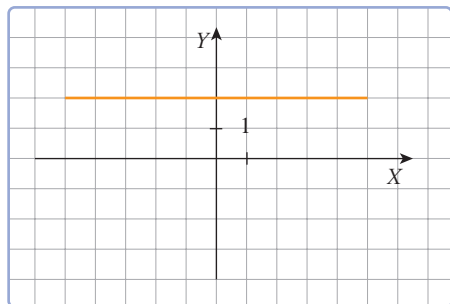
$$y = 5x - 2, y = -x - 7, y = x + 3, y = \frac{1}{6}x, y = -6x + 5, y = -\frac{7}{8}x + 4, y = 6, y = -9, y = 4x - 13$$

5. Podkreśl funkcje malejące.

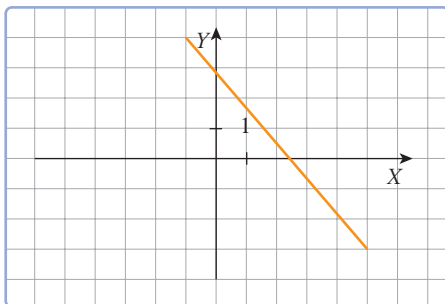
$$y = -5x - 2, y = 2x - 7, y = x - 43, y = -\frac{1}{6}x, y = -6x + 5, y = \frac{1}{3}x + 4, y = 6, y = -9, y = -8x - 1$$

6. Zapisz pod każdym wykresem, czy funkcja jest rosnąca, malejąca czy stała.

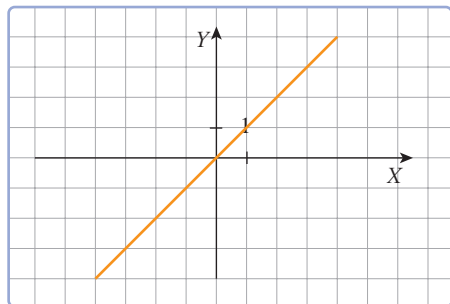
a)



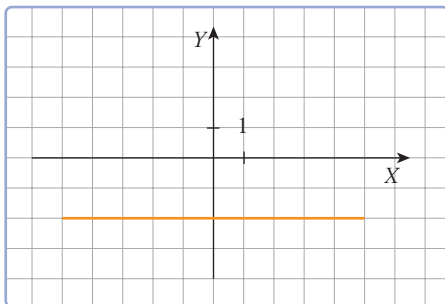
b)



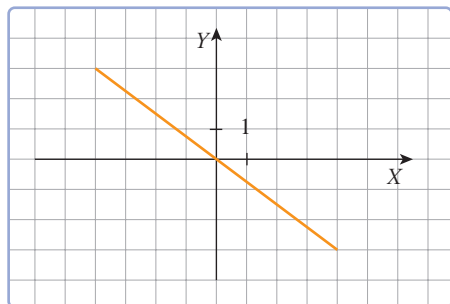
c)



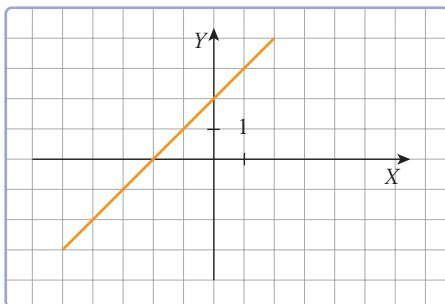
d)



e)



f)



4. Równania i nierówności liniowe

4.1. Równania liniowe z jedną niewiadomą

1. Uzupełnij zdania.

a) Równaniem liniowym nazywamy

.....

.....

.....

b) Pierwiastkiem równania (rozwiązaniem) nazywamy

.....

.....

.....

c) Równanie liniowe może mieć jedno rozwiązanie, może mieć

..... lub może nie mieć rozwiązania.

d) Równanie ma jedno rozwiązanie, gdy i wtedy nazywamy je równaniem

....., równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy

..... i wtedy nazywamy je równaniem

....., równanie nie ma rozwiązania, gdy i wtedy nazywamy je równaniem

.....

2. Uzupełnij równania, tak aby były tożsamościowe.

a) $3x - 2 = 7$

b) $-5x - 6 = 7x$

c) $8x = 12$

3. Uzupełnij równania, tak aby były sprzeczne.

a) $3x - 2 = 7$

b) $-5x - 6 = 7x$

c) $8x = 12$

4. Uzupełnij równania, tak aby były oznaczone.

a) $3x - 2 = 7$

b) $-5x - 6 = 7x$

c) $8x = 12$

5. Rozwiąż równania (uzupełnij tabelę).

Lp.	Równanie	Obliczenia i odpowiedź
1.	$2x - 5 < 3x + 7$	
2.	$3(x - 1) + 2 = 3x$	
3.	$-4(x + 2) + 8 = -4x$	
4.	$3(2x + 6) - 1 = 5(x - 4) + 9$	
5.	$(x + 1)^2 = (x - 2)^2$	
6.	$3 - (x - 2) = x^2 - (x + 1)^2$	
7.	$(2x - 3)^2 - (2 + 2x)^2 = 0$	
8.	$(3x + 2)^2 - 5 = 9x^2 + 12x + 4$	





Lp.	Równanie	Obliczenia i odpowiedź
9.	$x^2 - 2(x + 3) = (x - 1)^2 - 7$	
10.	$[(x - 4) + 2]3 =$ $= -2[x - 1 + 4(x + 1)]$	

6. Znajdź taką liczbę, która pomnożona przez 3 będzie równa tej liczbie zwiększonej o 5.

.....

7. Znajdź taką liczbę, która podzielona przez 2 będzie równa tej liczbie zmniejszonej o 4.

.....

8. Jeśli od szukanej liczby odejmiemy jej połowę, to otrzymamy 7. Co to za liczba?

.....

9. Jeżeli do szukanej liczby dodamy 40, to otrzymamy różnicę liczby podwojonej i 10. Co to za liczba?

.....

4.2. Nierówności liniowe

1. Uzupełnij zdanie.

Nierównością liniową nazywamy

.....

2. Rozwiąż nierówności (uzupełnij tabelę).

Lp.	Równanie	Obliczenia, odpowiedź i rysunek na osi liczbowej
1.	$2x - 5 < 3x + 7$	

Lp.	Równanie	Obliczenia, odpowiedź i rysunek na osi liczbowej
2.	$-(x-1)+2 > x-4$	
3.	$-4(x+2)+8 \leq -4x$	
4.	$2(2x+1)-1 \geq 2(x-7)+9$	
5.	$(x+1)^2 < (x-2)^2$	
6.	$5-(x-2) > x^2-(x+1)^2+7$	
7.	$(2x-3)^2-(2+2x)^2 < 0$	
8.	$(3x+2)^2-5 < 9x^2+12x+10$	





Lp.	Równanie	Obliczenia, odpowiedź i rysunek na osi liczbowej
9.	$x^2 - 2(x + 3) > (x - 1)^2$	
10.	$2x - 1 \leq 2x + 5$	

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające dane dwie nierówności jednocześnie.

a) $x < 6$ i $x \geq -5$

.....

.....

b) $2x + 3 > 3$ i $3x - 5 < x + 9$

.....

.....

c) $-x - 5 \leq 3x + 11$ i $x < 1$

.....

.....

.....

d) $(x - 2)^2 < x^2$ i $3x < 12$

.....

.....

.....

e) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \geq 6$ i $\frac{1}{3} > \frac{2}{3}x$

.....

.....

.....

5. Układy równań liniowych

5.1. Wprowadzenie

1. Uzupełnij definicję.

Układ równań liniowych to

2. Podaj 6 przykładów układów równań liniowych.

a) $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

5.2. Metoda podstawiania

1. Uzupełnij zdania.

a) Rozwiązaniem układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi nazywamy

b) Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi może mieć jedno rozwiązanie, lub nie mieć rozwiązania.

2. Sprawdź, czy dana para liczb jest rozwiązaniem układu (uzupełnij tabelę).

Lp.	Układ równań	Para liczb	Obliczenia i odpowiedź
1.	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$	





Lp.	Układ równań	Para liczb	Obliczenia i odpowiedź
2.	$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -16 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$	
3.	$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$	
4.	$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 5x + y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 2 \\ x = 8 \end{cases}$	
5.	$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 7y = -13 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	

3. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania (uzupełnij tabelę).

Lp.	Układ równań	Obliczenia i odpowiedź
1.	$\begin{cases} 2y - x = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$	
2.	$\begin{cases} 5x - 6y = -31 \\ 3x + 7y = -8 \end{cases}$	
3.	$\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ x + y = 10 \end{cases}$	
4.	$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$	
5.	$\begin{cases} 5x + y = 4 \\ y = -6 \end{cases}$	





Lp.	Układ równań	Obliczenia i odpowiedź
6.	$\begin{cases} 9x + y = 33 \\ 5x - 2y = 26 \end{cases}$	
7.	$\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 5 \end{cases}$	
8.	$\begin{cases} 3x + 24 = 14 \\ 5x - 4y = 5 \end{cases}$	
9.	$\begin{cases} 6x + 7y = 3 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$	
10.	$\begin{cases} 2x + \frac{2}{3}y = 44 \\ 3x - \frac{5}{6}y = 33 \end{cases}$	

5.3. Metoda przeciwnych współczynników

1. Rozwiąż podane układy metodą przeciwnych współczynników (uzupełnij tabelę).

Lp.	Układ równań	Obliczenia i odpowiedź
1.	$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$	
2.	$\begin{cases} x + y = 6 \\ -x - y = 0 \end{cases}$	
3.	$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$	
4.	$\begin{cases} \frac{1}{3}x + 2y = 8 \\ \frac{2}{3}x - 2y = 3 \end{cases}$	
5.	$\begin{cases} -3x - y = -9 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$	





Lp.	Układ równań	Obliczenia	Odpowiedź
6.	$\begin{cases} \frac{7x-3y}{5} = \frac{7x-5y}{6} \\ 3x-5y=8 \end{cases}$		
7.	$\begin{cases} 3x+2y=11 \\ x^2-4+2y=(x-2)^2+y \end{cases}$		
8.	$\begin{cases} -2,5x-2y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$		
9.	$\begin{cases} -3x+3y=-6 \\ 6x-6y=12 \end{cases}$		
10.	$\begin{cases} 7x-13=12y-20 \\ x+3y=8x-8y \end{cases}$		

2. Jeśli do pewnej liczby dodamy jedną czwartą drugiej liczby, to otrzymamy 21. Jeżeli zaś do drugiej liczby dodamy jedną czwartą pierwszej liczby, to otrzymamy 24. **Wyznacz te liczby.**

3. Suma dwóch liczb wynosi 56, a ich stosunek 3:4. **Co to za liczby?**

4. Obwód prostokąta wynosi 120 cm. Jeśli jeden bok zwiększymy o 10 cm, a drugi zmniejszymy o 10 cm, to otrzymamy kwadrat. **Oblicz długości boków tego prostokąta.**

5. Przewieziono 88t towaru osiemnastoma samochodami o ładowności 4 i 6t, przy czym wszystkie samochody załadowano maksymalnie. Ile było samochodów każdego rodzaju?

6. Za 5 lat Zosia i Marysia będą miały razem 36 lat. Zosia jest o 4 lata młodsza od Marysi. Ile lat ma obecnie każda z nich?

7. Zmieszano 2 rodzaje roztworu: o stężeniu 10% i o stężeniu 25%. Otrzymano w ten sposób 60 l roztworu o stężeniu 15%. Ile zmieszano roztworu każdego rodzaju?

8. Za 2 kg jabłek i 3 kg gruszek zapłacono 18 zł. Gdyby kupiono 5 kg jabłek i 5 kg gruszek, to zapłacono by 35 zł. **Ile wynosi cena 1 kg jabłek, a ile 1 kg gruszek?**

9. W jednym naczyniu jest o 5 l płynu więcej niż w drugim. Gdybyśmy do każdego z nich dolali po 1 l płynu, to w jednym naczyniu byłoby dwa razy więcej płynu niż w drugim. **Ile litrów płynu jest w każdym naczyniu?**

10. Odległość środków dwóch okręgów stycznych zewnętrznie wynosi 14 cm. Gdyby te okręgi były styczne wewnętrznie, to odległość ich środków wynosiłaby 6 cm. **Oblicz długości promieni tych okręgów.**

5.4. Metoda graficzna

1. Uzupełnij zdania.

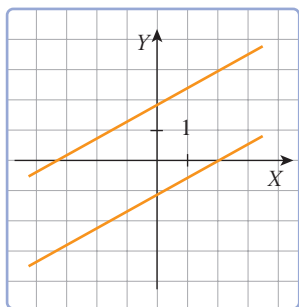
a) Jeśli układ równań liniowych jest oznaczony, czyli ma jedno rozwiązanie, to wykresy tych równań są

b) Jeśli układ równań liniowych jest nieoznaczony, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań, to wykresy tych równań są

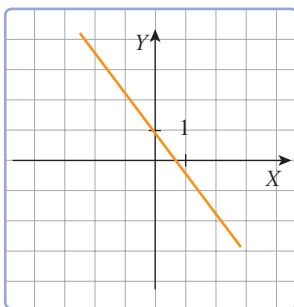
c) Jeśli układ równań liniowych jest sprzeczny, czyli nie ma rozwiązania, to wykresy tych równań są

2. Na rysunkach przedstawiono graficznie 3 układy równań. **Zapisz pod każdym, jaki to układ.**

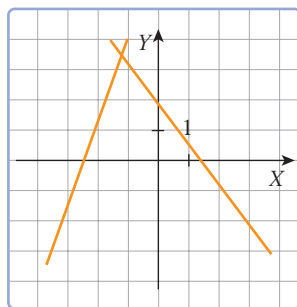
a)



b)

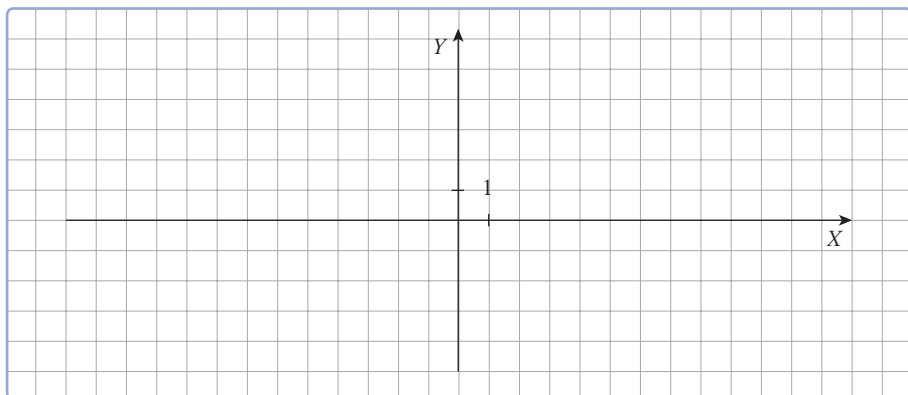


c)

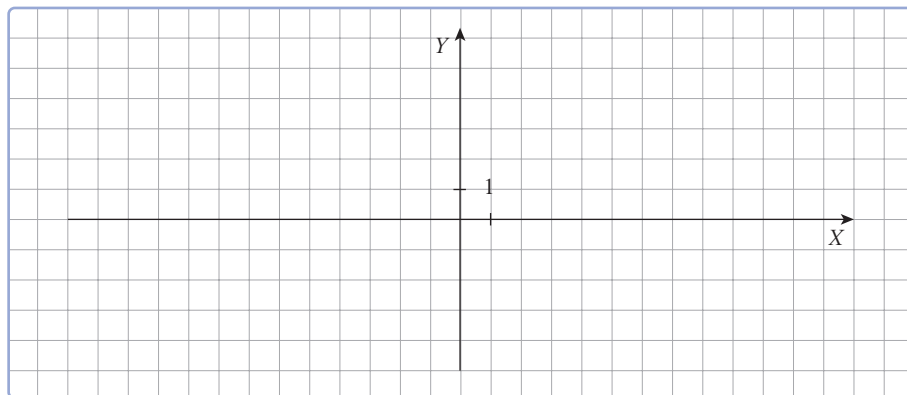


3. Rozwiąż graficznie układy równań.

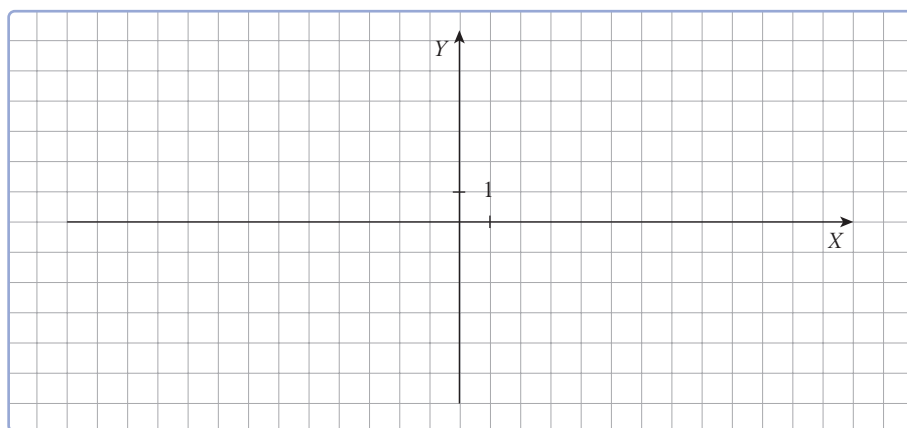
a)
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$



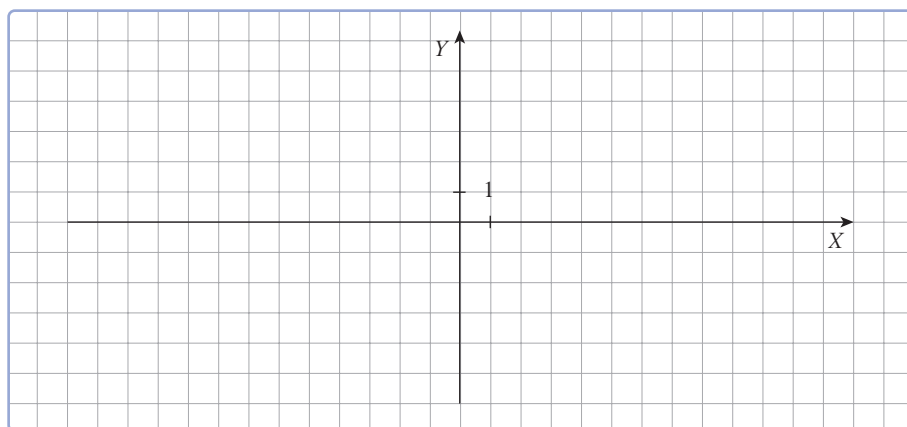
$$\text{b) } \begin{cases} -x - 4y = 2 \\ \frac{1}{2}x + 2y = 3 \end{cases}$$



$$\text{c) } \begin{cases} -x - y = -4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$$

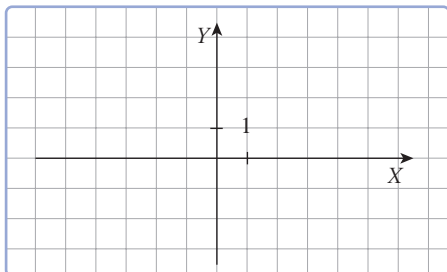


$$\text{d) } \begin{cases} 7x + 6y = 13 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$$

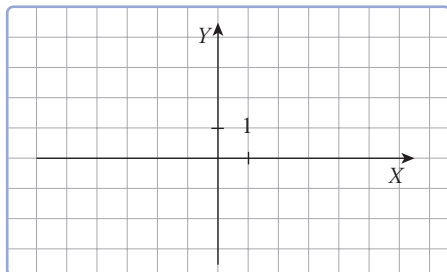


4. Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory punktów, których współrzędne spełniają podane warunki.

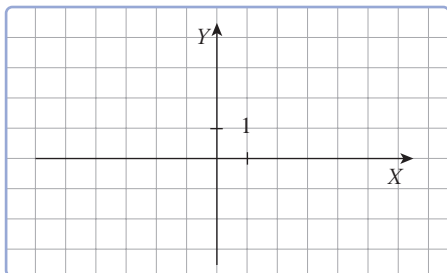
a) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y < 4 \end{cases}$



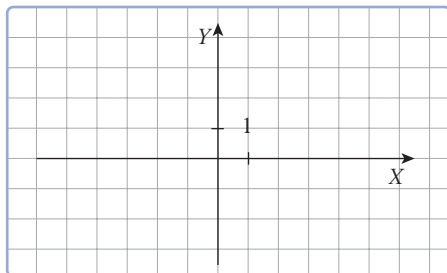
b) $\begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases}$



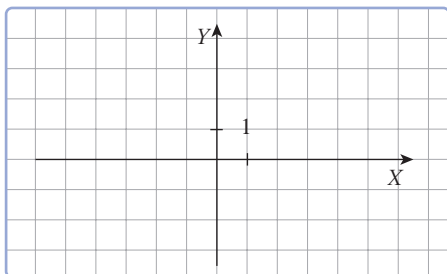
c) $\begin{cases} y > x \\ y \geq -4 \end{cases}$



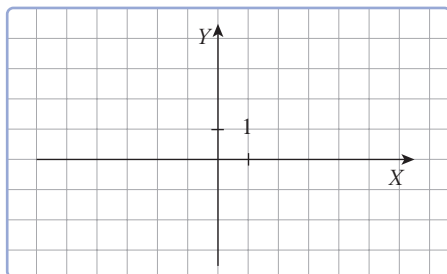
d) $\begin{cases} y > -x - 2 \\ y < \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$



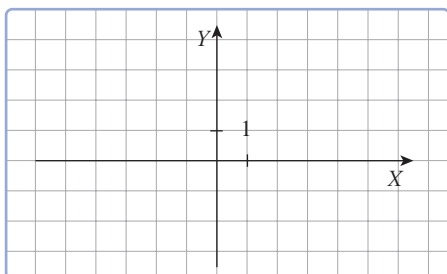
e) $\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y \leq 2 \end{cases}$



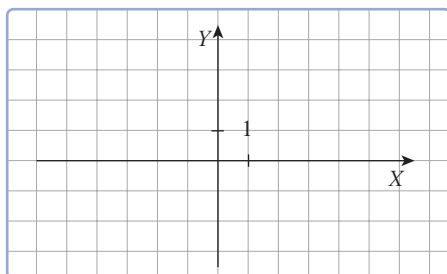
f) $\begin{cases} x > 5 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$



g) $\begin{cases} x > -4 \\ y > -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$



h) $\begin{cases} x \leq 3 \\ y > 1 \end{cases}$



6. Funkcje kwadratowe

6.1. Definicja funkcji kwadratowej

1. Uzupełnij definicję.

Funkcją kwadratową nazywamy

.....

Tę postać nazywamy postacią funkcji kwadratowej
lub trójmianu kwadratowego.

2. Podaj wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, mając dane współczynniki a , b , c .

a) $a = 2$, $b = 3$, $c = -6$

.....

b) $a = 1$, $b = -3$, $c = 4$

.....

c) $a = 12$, $b = -10$, $c = 100$

.....

d) $a = 2$, $b = 0$, $c = -16$

.....

e) $a = -3$, $b = 7$, $c = 0$

.....

3. Wypisz współczynniki podanych trójmianów kwadratowych.

a) $y = 4x^2 - 5x - 11$ $a =$, $b =$, $c =$

b) $y = -x^2 - 15x$ $a =$, $b =$, $c =$

c) $y = 24x^2 - 16$ $a =$, $b =$, $c =$

d) $y = \frac{3}{4}x^2 - 10x + \frac{1}{4}$ $a =$, $b =$, $c =$

e) $y = 40x^2 + 60x - 75$ $a =$, $b =$, $c =$

4. Znajdź wartość podanej funkcji kwadratowej dla danego argumentu.

a) $y = x^2 - 4$, $x = 2$

.....

b) $y = x^2 - 4$, $x = -3$

.....

c) $y = -x^2 - 4x + 5$, $x = 2$

.....





d) $y = 3x^2 + 2x + 7, x = -4$

e) $y = -4x^2 - 10, x = -1$

6.2. Wykres funkcji kwadratowej

1. Uzupełnij zdanie:

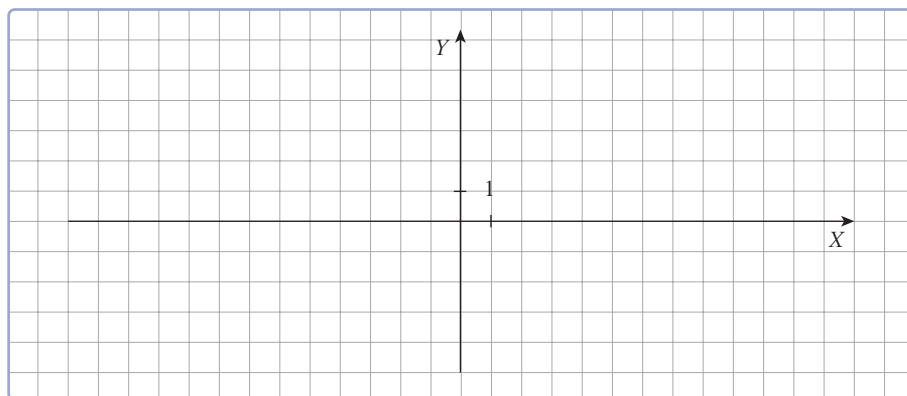
Wykres funkcji kwadratowej nazywamy

2. Do wykresu funkcji $f(x)$ należy punkt A. Wyznacz parametr (uzupełnij tabelę).

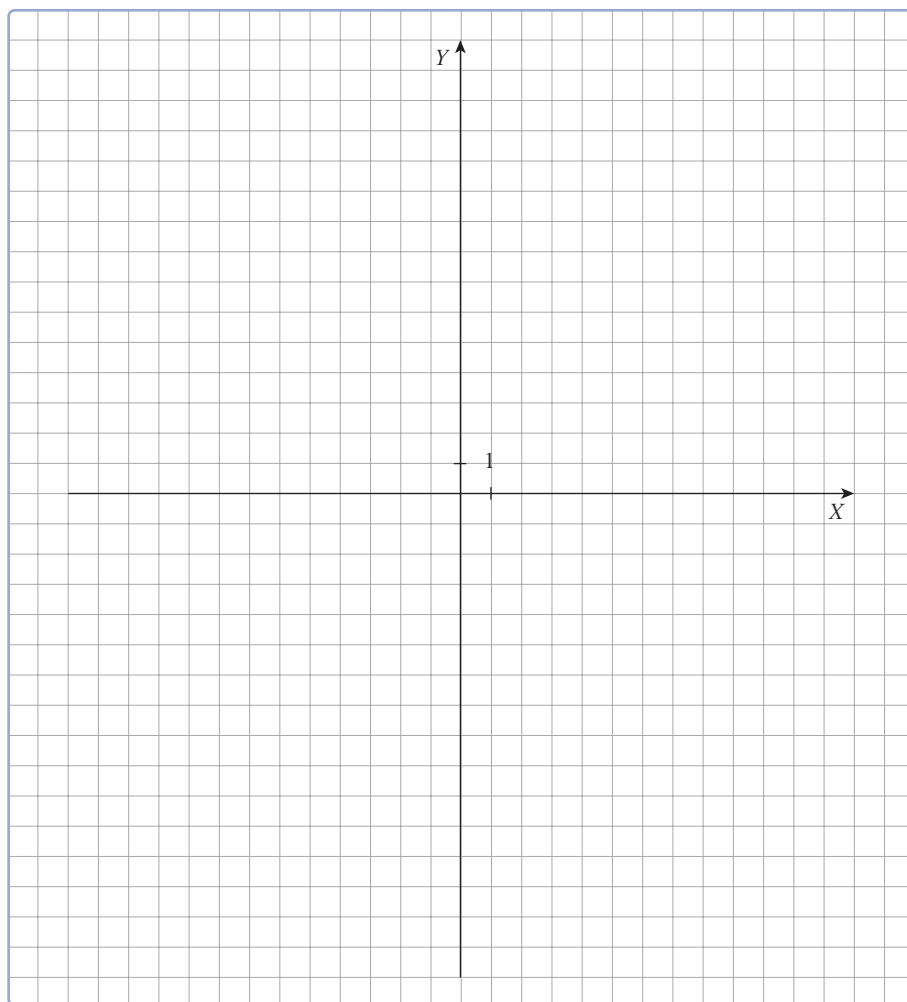
Lp.	Wzór funkcji	Punkt A	Obliczenia i odpowiedź
1.	$f(x) = ax^2$	$A = (-2; 1)$	
2.	$f(x) = x^2 + bx$	$A = (3; 4)$	
3.	$f(x) = x^2 - 5x + c$	$A = (0; -1)$	
4.	$f(x) = -x^2 + x - c$	$A = (1; 2)$	
5.	$f(x) = -4x^2 - c$	$A = (1; 0)$	

3. Naszkicuj wykresy funkcji.

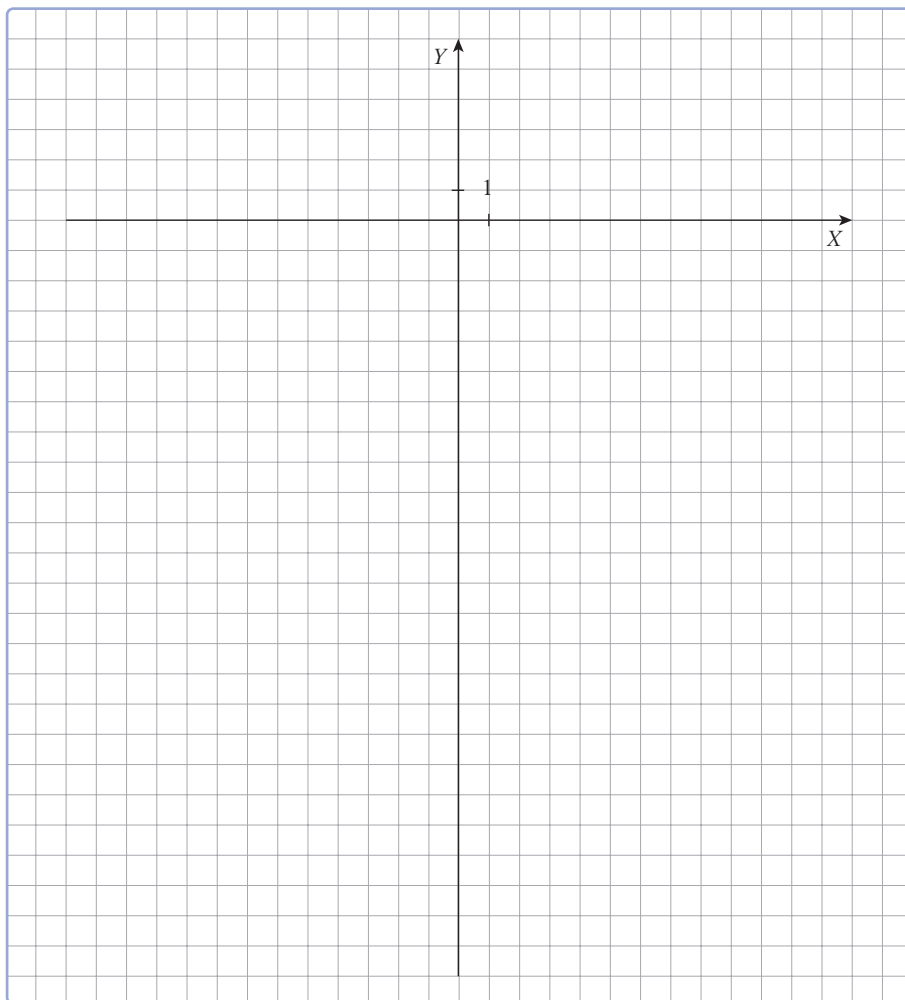
a) $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 1$



b) $y = x^2 + 2x$, $y = x^2 - 4x$, $y = -x^2 - 6x$



►► c) $y = -x^2 - 2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$, $y = -3x^2 - 2$



6.3. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

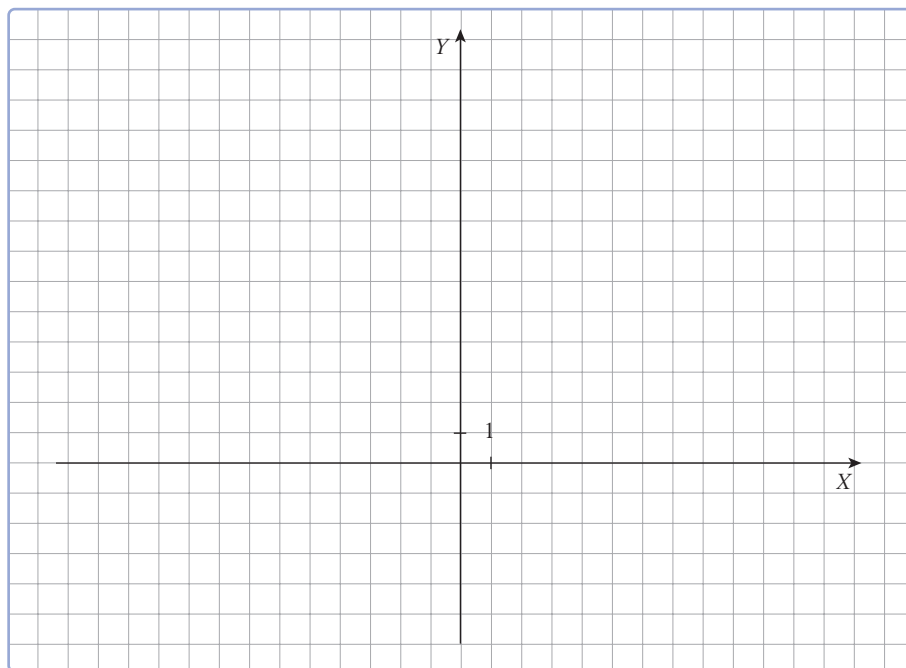
1. Uzupełnij zdania.

Postacią kanoniczną funkcji kwadratowej nazywamy postać

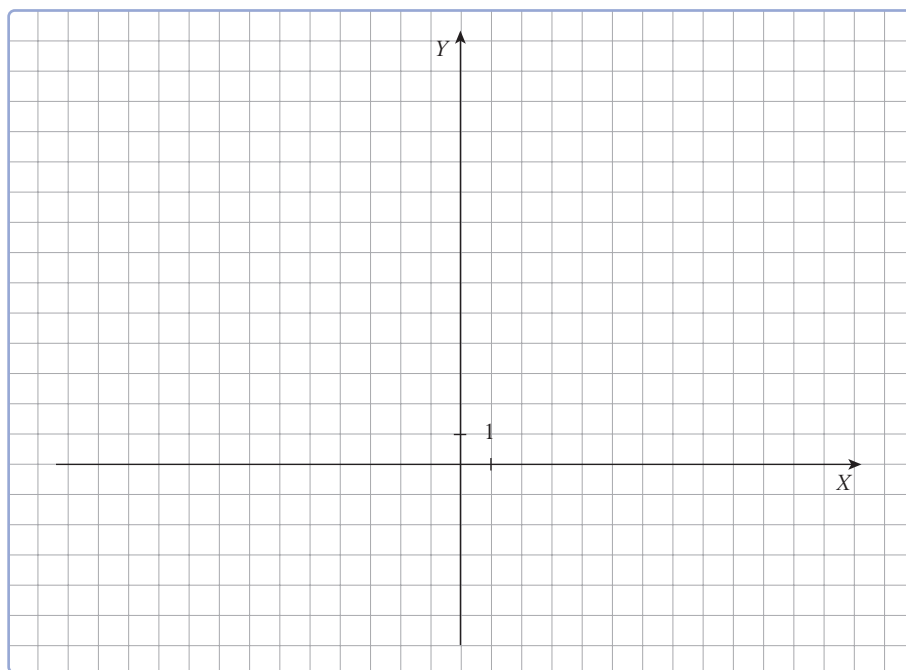
Wykres funkcji $y = a(x - p)^2 + q$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji o p jednostek w lub w w zależności od tego, czy p jest, czy oraz o q jednostek w lub w w zależności od tego, czy q jest, czy

2. Wykonaj z tektury szablon funkcji $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x^2$. Postępując się szablonami, naszkicuj w układzie współrzędnych wykresy podanych funkcji.

a) $y = x^2 - 4$, $y = (x - 4)^2$, $y = (x + 3)^2 - 5$

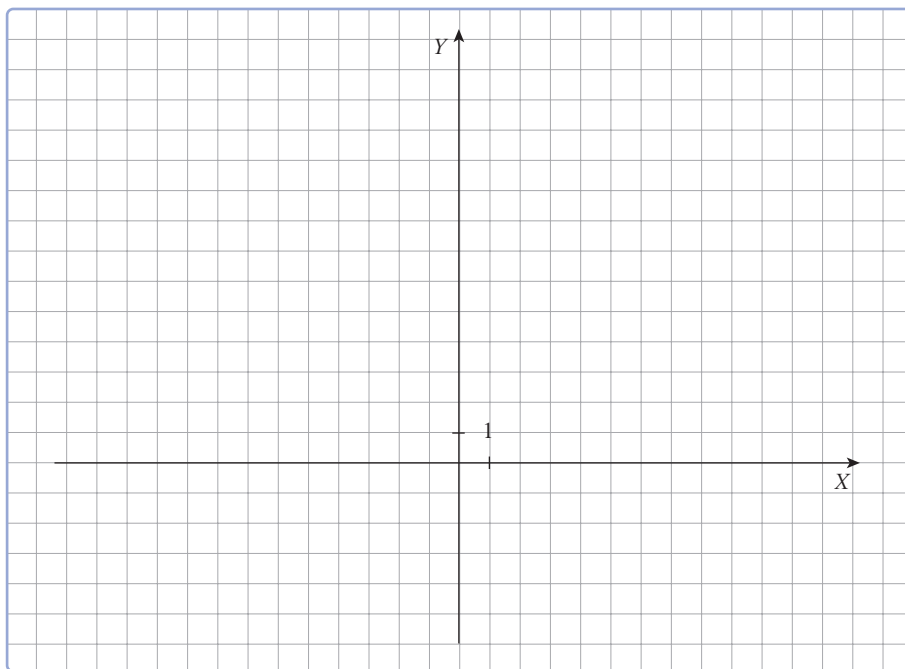


b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $y = \frac{1}{2}(x + 4)^2$, $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 45$





c) $y = 3x^2 + 4$, $y = 3(x + 5)^2$, $y = 3(x - 2)^2 + 6$



3. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli.

a) $y = 2(x + 7)^2 - 1$

b) $y = -2(x + 1)^2 + 1$

c) $y = 4(x + 10)^2 - 20$

d) $y = -3(x + 5)^2$

e) $y = x^2 - 1$

4. Uzupełnij wzory dotyczące trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ i jego postaci kanonicznej:

$\Delta =$ $p =$ $q =$

5. Sprowadź dane trójmiany do postaci ogólnej.

a) $y = (x - 3)^2 + 7$

$$\text{b) } y = (x + 2)^2 + 2$$

$$\text{c) } y = -(x - 1)^2 - 12$$

$$\text{d) } y = 3(x - 3)^2 + 10$$

$$\text{e) } y = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + \frac{5}{2}$$

$$\text{f) } y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$$

$$\text{g) } y = -4(x + 1)^2 - 2$$

$$\text{h) } y = 5(x - 3)^2 - 25$$

6. Sprowadź dane trójmiany do postaci kanonicznej.

$$\text{a) } y = x^2 - 2x + 2$$

$$\text{b) } y = x^2 - 4x - 5$$

$$\text{c) } y = -x^2 - x + 12$$

$$\text{d) } y = -x^2 - 8x - 4$$

$$\text{e) } y = 2x^2 - 2x + 2$$

$$\text{f) } y = 3x^2 - 12x + 20$$

$$\text{g) } y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2$$

$$\text{h) } y = x^2 + 2x + 2$$

$$\text{i) } y = 4x^2 + 16x + 20$$

7. Dana jest funkcja kwadratowa o współczynniku a i wierzchołku W . Wyznacz wzór tej funkcji, wiedząc, że:

a) $a = 1, W = (2; 1)$

.....

.....

.....

b) $a = -1, W = (2; -13)$

.....

.....

.....

c) $a = 2, W = (-5; 3)$

.....

.....

.....

d) $a = 3, W = (-4; -5)$

.....

.....

.....

e) $a = -3, W = (2; 1)$

.....

.....

.....

f) $a = \frac{1}{2}, W = (-2; 4)$

.....

.....

.....

g) $a = -\frac{1}{3}$, $W = (-7; -4)$

.....

.....

.....

h) $a = \sqrt{2}$, $W = (2; -7)$

.....

.....

.....

6.4. Postać iloczynowa i miejsca zerowe funkcji kwadratowej**1. Uzupełnij twierdzenie.**

Funkcja kwadratowa ma dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy, ma jedno miejsce zerowe, gdy, nie ma miejsc zerowych, gdy

Gdy $\Delta > 0$, to miejscami zerowymi są liczby

Gdy $\Delta = 0$, to miejscem zerowym jest liczba

2. Uzupełnij zdanie.

Postacią iloczynową funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ nazywamy

.....

.....

3. Dana jest postać ogólna lub iloczynowa funkcji kwadratowej. Podaj pierwiastki i drugą postać tej funkcji (uzupełnij tabelę).

Lp.	Postać ogólna funkcji kwadratowej	Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	Pierwiastki	Obliczenia
1.	$y = x^2 - 5x - 6$			





Lp.	Postać ogólna funkcji kwadratowej	Postać iloczynowa funkcji kwadratowej	Pierwiastki	Obliczenia
2.	$y = -2x^2 + x + 1$			
3.	$y = x^2 - 10x + 6$			
4.	$y = -4x^2 + 3x + 1$			
5.	$y = 4x^2 + 4x + 4$			
6.	$y = -x^2 - 8x - 16$			
7.	$y = -3x^2 - 2x + 1$			
8.	$y = x^2 + 5x + 7$			

9.	$y = x^2 - 13x + 30$			
10.	$y = 12x^2 + x - 1$			

4. Podaj przykład funkcji kwadratowej, która ma pierwiastki 5 i 8 i ramiona paraboli skierowane są do góry.

.....

5. Podaj przykład funkcji kwadratowej, która ma pierwiastki 3 i (-2) i ramiona paraboli skierowane są do dołu.

.....

6. Podaj przykład funkcji kwadratowej, która ma pierwiastek 17 i ramiona paraboli skierowane są do góry.

.....

7. Podaj przykład funkcji kwadratowej, która ma pierwiastek $(-0; 5)$ i ramiona paraboli skierowane są do dołu.

.....

8. Do wykresu funkcji kwadratowej należy punkt $A = (2; 1)$, a miejscami zerowymi są (-3) i 4. Wyznacz wzór tej funkcji.

.....

.....

.....

.....

.....

9. Do wykresu funkcji kwadratowej należy punkt $A = (-2; 10)$, a miejscami zerowymi są 5 i 4. **Wyznacz wzór tej funkcji.**

10. Do wykresu funkcji kwadratowej należy punkt $A = (2; 1)$, a jedynym miejscem zerowym jest liczba 12. **Wyznacz wzór tej funkcji.**

7. Równania i nierówności kwadratowe

7.1. Wprowadzenie

1. Znajdź takie liczby, aby spełnione zostały poniższe równania.

a) $x^2 = 64$

.....

b) $(x + 2)^2 = 25$

.....

.....

.....

c) $(x - 7)^2 = 1$

.....

.....

.....

d) $(2x + 1)^2 = 16$

.....

.....

.....

e) $(x - 20)^2 = 0$

.....

.....

.....

2. Znajdź odpowiednie liczby, aby spełnione zostały poniższe równania.

a) $x(x + 1) = 0$

.....

b) $(x - 2)(x - 5) = 0$

.....

c) $(2x + 4)(2x - 4) = 0$

.....

d) $x(5x - 1) = 0$

.....

e) $(x + 7)(x - 3) = 0$

.....

.....

7.2. Równania kwadratowe

1. Uzupełnij tabelę.

Równanie kwadratowe	Warunek na wyróżnik	Liczba rozwiązań	Rozwiązanie (jeżeli istnieje)
$ax^2 + bx + c = 0$	$\Delta > 0$		
$ax^2 + bx + c = 0$		jedno	
$ax^2 + bx + c = 0$			nie istnieje

2. Rozwiąż równania.

Lp.	Równanie	Obliczenia i odpowiedź
1.	$x^2 = 5x - 6$	
2.	$(x - 1)^2 = 5x - 12$	
3.	$-5x^2 + 4x + 1 = 0$	
4.	$9x^2 + 6x + 1 = 0$	

Lp.	Równanie	Obliczenia i odpowiedź
5.	$x^2 - 2x + 6 = 0$	
6.	$(x-2)^2 - (2x-2)^2 = 0$	
7.	$(3x+1)^2 = 6x+2$	
8.	$x^2 - x - 6 = 2x^2 - 11x + 3$	
9.	$2 - 5x = (x-4)^2$	
10.	$x^2 + 5x - 9 = 2(x-2) - 1$	

3. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych wynosi 194. Wyznacz te liczby.

4. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych wynosi 100. Wyznacz te liczby.

5. Liczba przekątnych wielokąta wypukłego o n bokach wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$. Ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba wszystkich przekątnych jest o 33 większa od liczby boków?

6. Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego, wiedząc, że są one kolejnymi liczbami naturalnymi.

7. Boki prostokąta różnią się o 4 cm, a jego pole wynosi 40 cm^2 . Oblicz długości boków.

8. Różnica liczby i jej odwrotności wynosi $\frac{48}{7}$. Co to za liczba?

.....

.....

.....

9. Bok jednego kwadratu jest o 5 dłuższy od boku drugiego kwadratu, suma pól obu kwadratów wynosi 97. Oblicz obwody tych kwadratów.

.....

.....

.....

10. Na spotkanie przyszło kilka osób i każdy przywitał się z każdym. W sumie było 21 powitań. Ile osób przyszło na to spotkanie?

.....

.....

.....

7.3. Wzory Viète'a

1. Uzupełnij twierdzenie.

Jeśli wyróżnik trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ jest nieujemny, to sumę i iloczyn pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$ wyrażają wzory:

.....

2. Uzupełnij tabelę.

Lp.	Równanie	Wyróżnik	Suma pierwiastków	Iloczyn pierwiastków
1.	$x^2 - 6x + 1 = 0$			
2.	$2x^2 - x - 5 = 0$			
3.	$25x^2 - 10 + 1 = 0$			





Lp.	Równanie	Wyróżnik	Suma pierwiastków	Iloczyn pierwiastków
4.	$-x^2 - 4x + 3 = 0$			
5.	$-2x^2 + 10x + 3 = 0$			

3. Wyznacz brakujący parametr w równaniu, korzystając z danych.

a) $x^2 - 4x + c = 0$, $x_1 x_2 = 3$

b) $-2x^2 + 3x + c = 0$, $x_1 x_2 = 5$

c) $x^2 + bx + 1 = 0$, $x_1 + x_2 = 3$

d) $3x^2 + bx + 2 = 0$, $x_1 + x_2 = -5$

4. Sprawdź, że dane równanie ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków (nie obliczaj tych pierwiastków).

a) $x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $4x^2 + 10x + 3 = 0$

c) $-2x^2 + 7x - 1 = 0$

5. Sprawdź, że dane równanie ma dwa pierwiastki różnych znaków (nie obliczaj tych pierwiastków).

a) $x^2 + 5x - 1 = 0$

b) $-4x^2 + 8x + 2 = 0$

c) $-2x^2 - 9x + 4 = 0$

6. Sprawdź znaki pierwiastków równania bez obliczania tych pierwiastków.

a) $x^2 + 5x + 2 = 0$

.....

.....

b) $-x^2 + 5x + 3 = 0$

.....

.....

c) $-2x^2 - 9x - 2 = 0$

.....

.....

d) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

.....

.....

e) $-4x^2 - 20x - 2 = 0$

.....

.....

f) $-5x^2 - 9x + 4 = 0$

.....

.....

7. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - x + m - 4 = 0$ ma dwa pierwiastki jednakowych znaków?

.....

.....

.....

.....

.....

8. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - x + 2m + 1 = 0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

.....

.....

.....

.....

.....

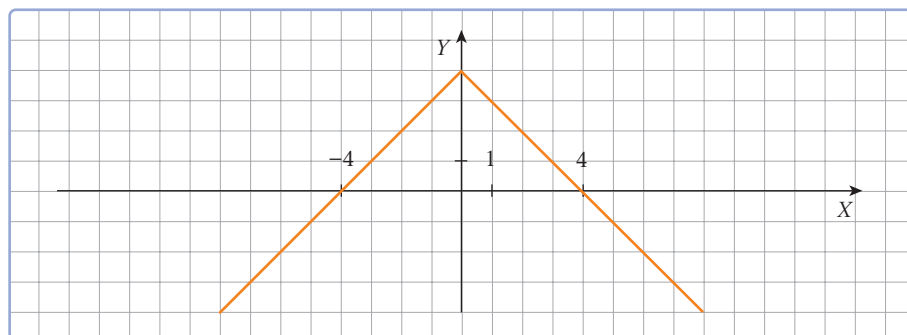
7.4. Wartości dodatnie i ujemne funkcji

1. Uzupełnij tabelę.

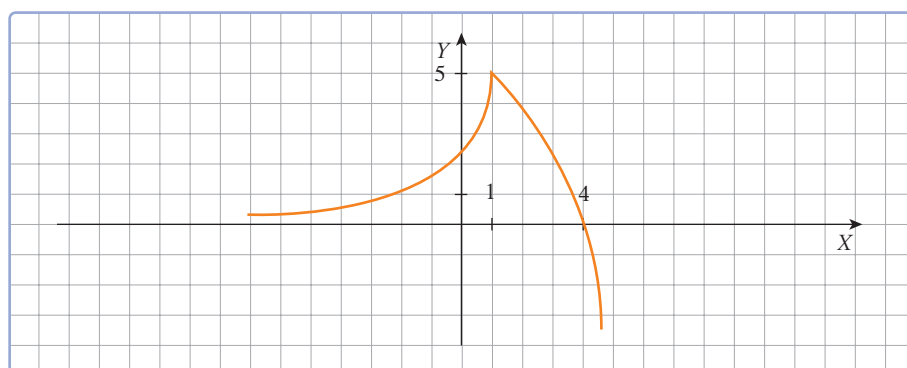
Lp.	Funkcja	Wartości dodatnie funkcja przyjmuje dla argumentów	Wartości ujemne funkcja przyjmuje dla argumentów	Obliczenia
1.	$y = 2x$			
2.	$y = 3x - 5$			
3.	$y = -2$			
4.	$y = -4x - 8$			
5.	$y = 5$			
6.	$y = \frac{2}{3}x - 4$			
7.	$y = -\frac{1}{2x+7}$			
8.	$y = 10x$			
9.	$y = -x - 12$			
10.	$y = \sqrt{2}$			

2. Odczytaj z rysunku, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

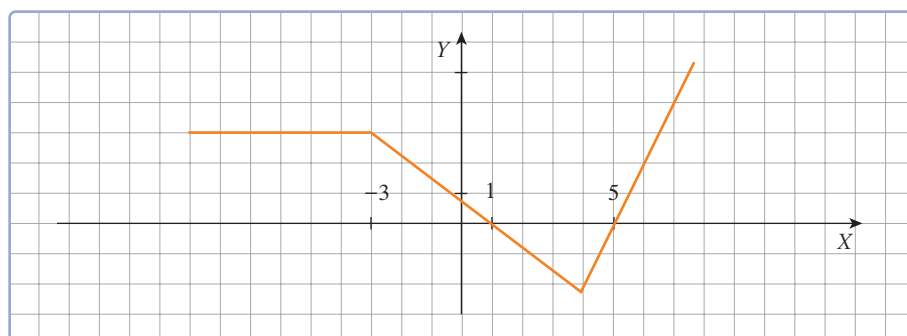
a)



b)



c)



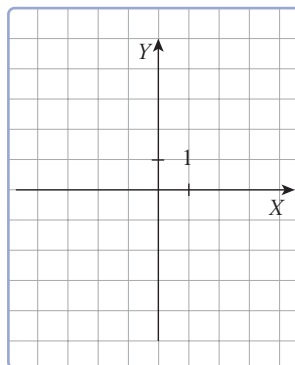
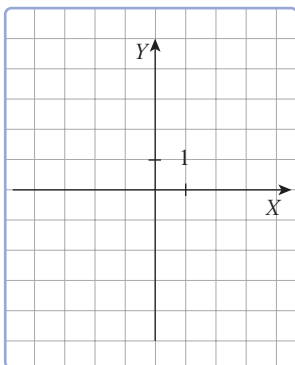
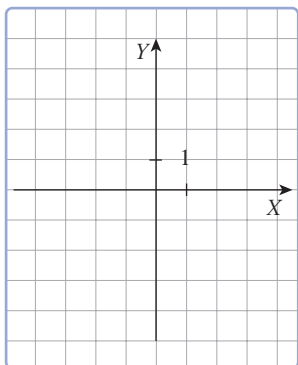
7.5. Nierówności kwadratowe

1. Naskicuj w układzie współrzędnych parabole, które są wykresami trójmianów $y = ax^2 + bx + c$ spełniającymi podane warunki.

a) $a > 0, \Delta > 0$

b) $a > 0, \Delta = 0$

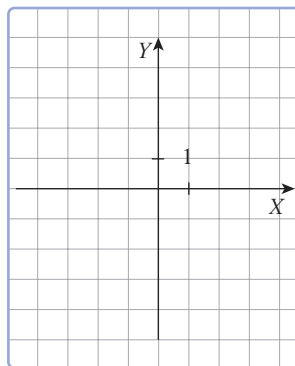
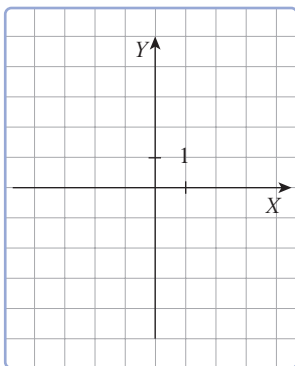
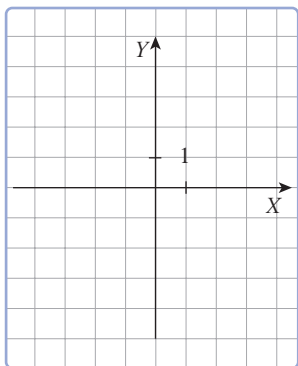
c) $a > 0, \Delta < 0$



d) $a < 0, \Delta > 0$

e) $a < 0, \Delta = 0$

f) $a < 0, \Delta < 0$



Lp.	Nierówność	Obliczenia	Rysunek pomocniczy	Odpowiedź
1.	$x^2 - 3x + 2 > 0$			
2.	$2x^2 - x - 1 < 0$			

Lp.	Nierówność	Obliczenia	Rysunek pomocniczy	Odpowiedź
3.	$-x^2+5x+6\leq 0$			
4.	$-9x^2+10x-1\geq 0$			
5.	$x^2-8x+16>0$			
6.	$x^2+x+3<0$			
7.	$2x^2-5x>0$			
8.	$9x^2-6x+1\leq 0$			
9.	$-2x^2+4x-10\geq 0$			
10.	$-3x^2-x-2<0$			

2. Rozwiąż nierówności (uzupełnij tabelę).

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność:

a) $x^2 - 10x + 21 < 0$

b) $-x^2 + 6x + 16 \geq 0$

c) $x^2 + 7x + 6 \geq 0$

4. Rozwiązaniem nierówności jest dany przedział. Wyznacz liczby a i b .

a) $(x - a)(x - b) < 0, (5; 6)$

b) $(x - a)(2x - b) \leq 0, \langle -4; -2 \rangle$

c) $(a - x)(4x + b) \geq 0, \langle -6; 10 \rangle$

d) $(a - x)(x - b) \geq 0 \langle -10; 4 \rangle$

8. Równania i nierówności stopnia trzeciego – wybrane przypadki

8.1. Dzielenie wielomianów

1. Wykonaj działania i uporządkuj wielomiany.

a) $(x+2)(x^2-3x+4)$

.....

.....

b) $(x^3+2)(x^2-4x)$

.....

.....

c) $(3x^3+2x+2)(x^2-2x+6)$

.....

.....

d) $(x^7+2)(x^5-4)$

.....

.....

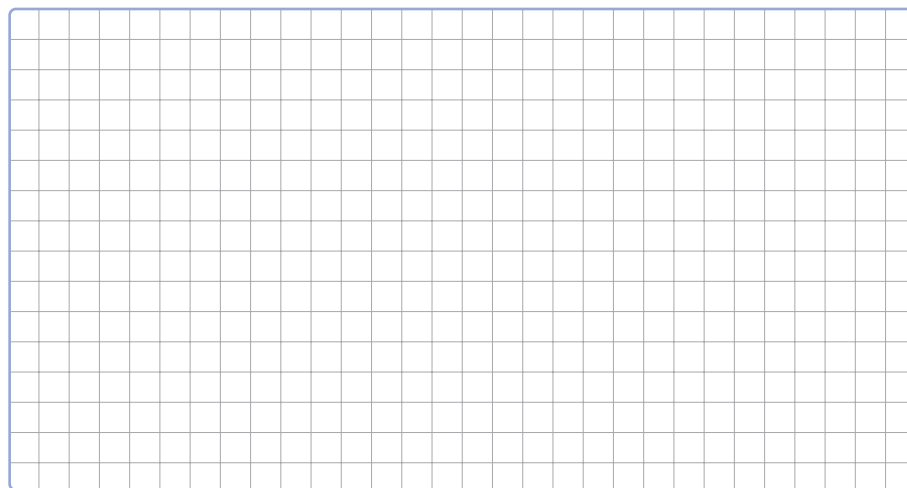
e) $(-x^2+3x-1)(x^3-3x+4)$

.....

.....

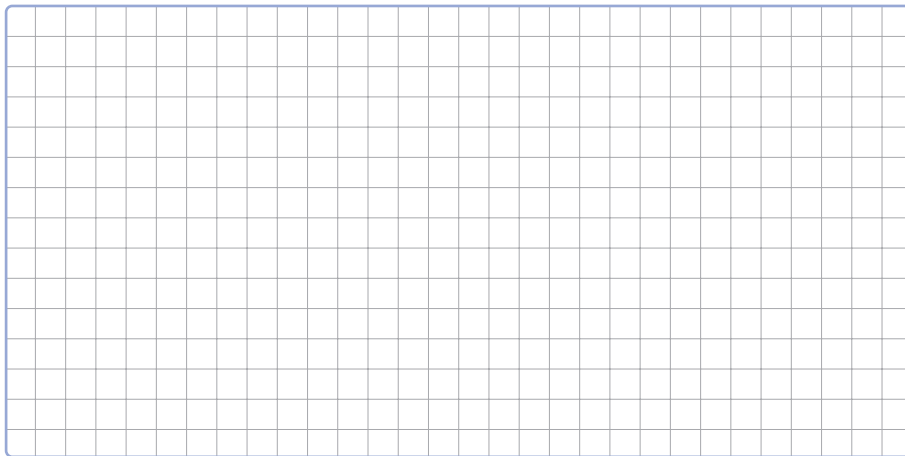
2. Wykonaj dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$. Następnie zapisz wielomian $W(x)$ w postaci sumy iloczynu wielomianu $P(x)$ i ilorazu $I(x)$ oraz reszty $R(x)$, jeśli:

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 3$, $P(x) = x - 1$

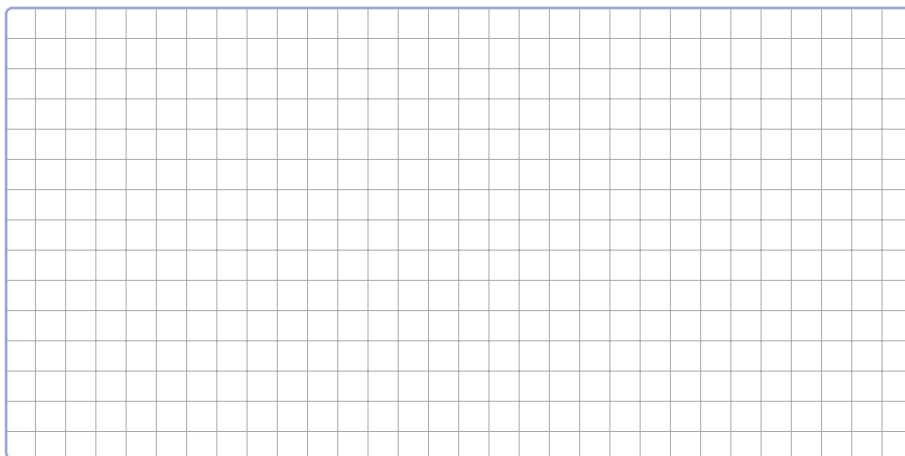




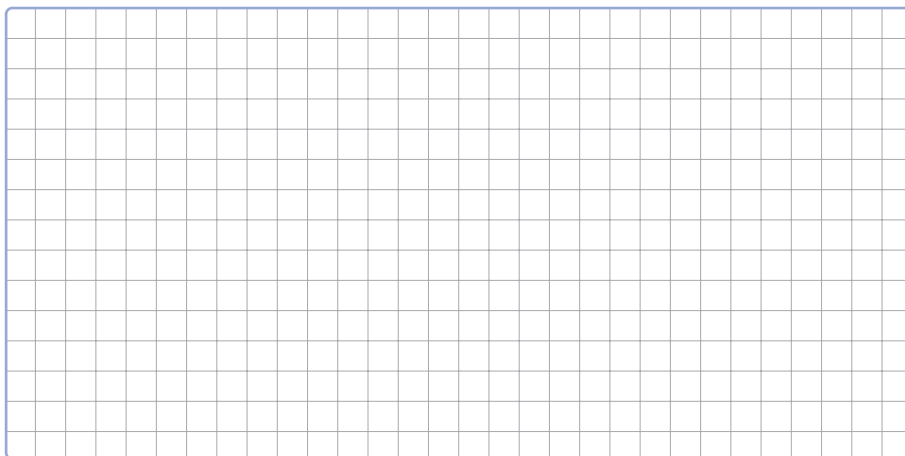
b) $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 30$, $P(x) = x + 2$



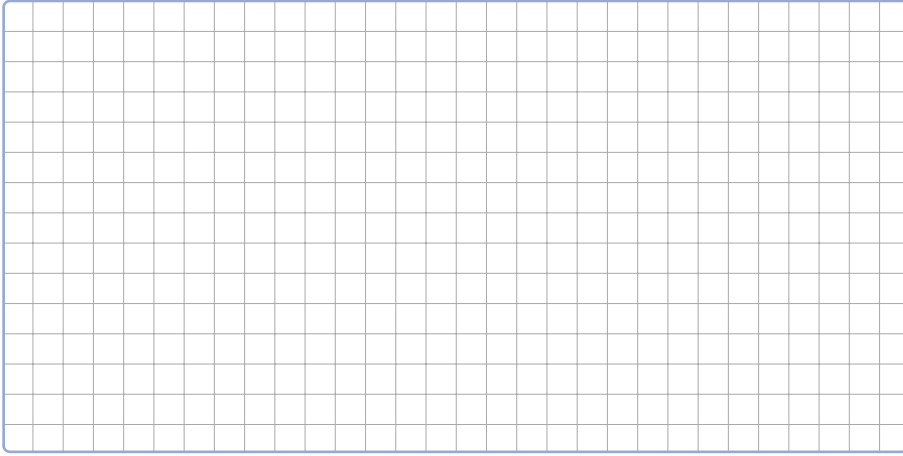
c) $W(x) = x^3 - 15x + 13$, $P(x) = x - 1$



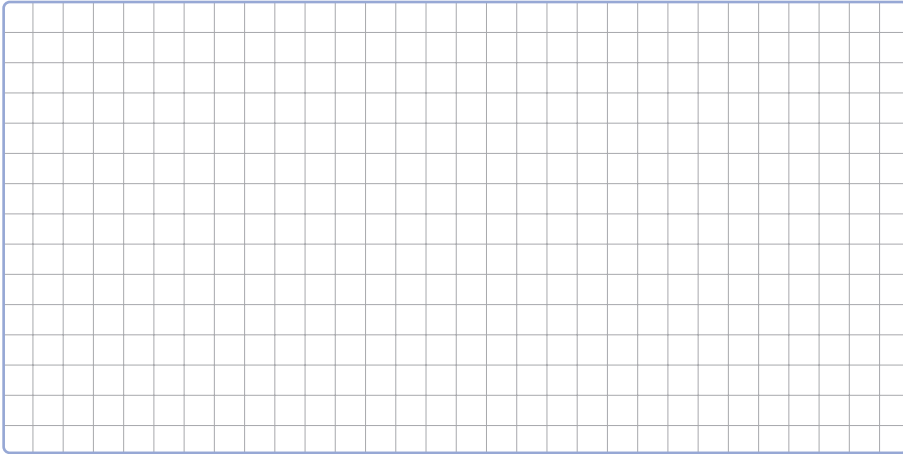
d) $W(x) = x^4 - 8x^2 + 6x + 1$, $P(x) = x^2 - 1$



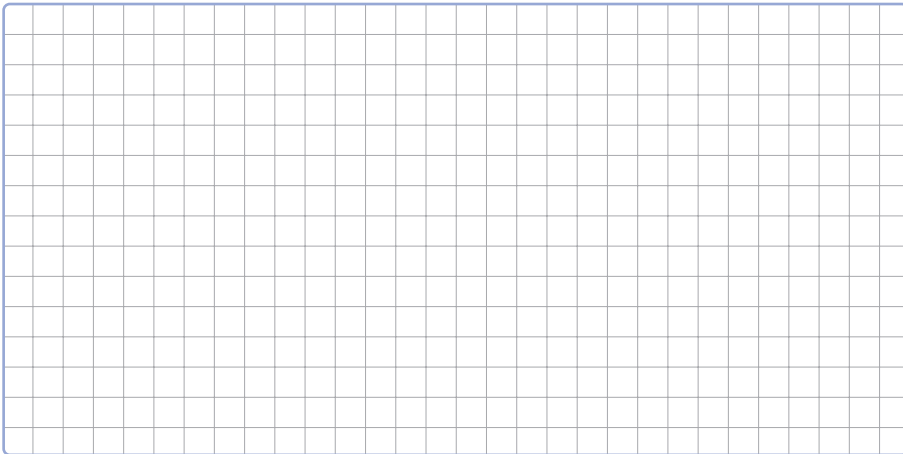
e) $W(x) = 3x^5 - 2x^4 + 4x^2 + 3$, $P(x) = x^3 - x^2 - 1$



f) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $P(x) = x^2 + x + 5$

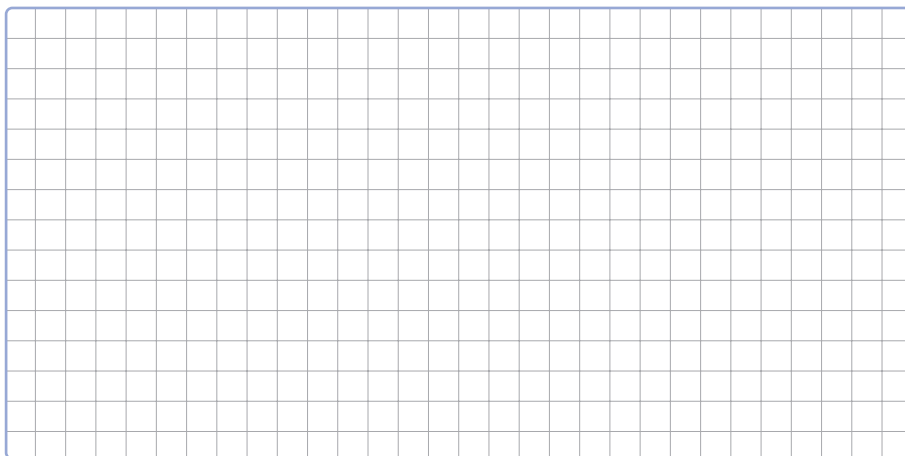


g) $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, $P(x) = x - 1$

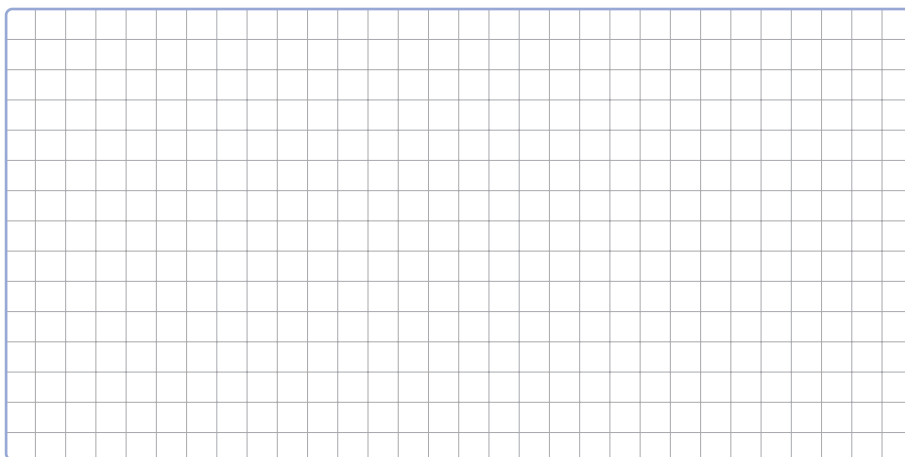




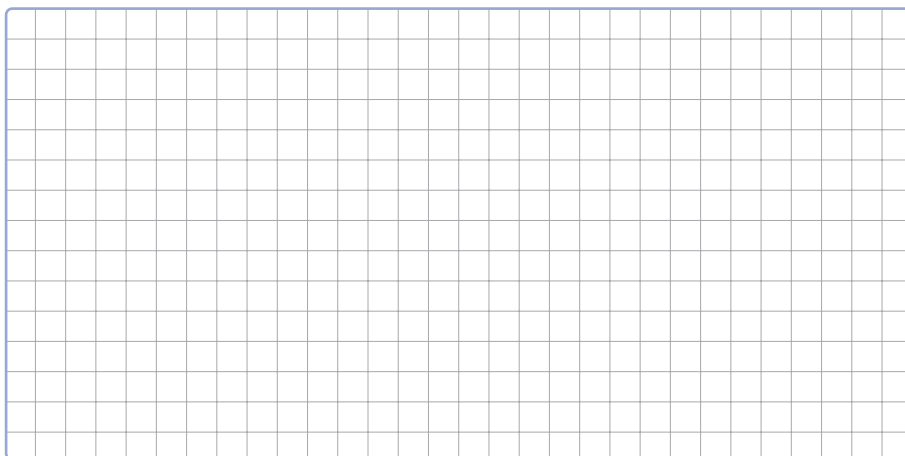
h) $W(x) = -2x^3 + 3x^2 - x + 6$, $P(x) = x - 2$



i) $W(x) = x^6 - 4x^3 + 4$, $P(x) = x^3 - 2$



j) $W(x) = x^4 - 10x^2 + 36$, $P(x) = x^2 - 4x + 3$



8.2. Pierwiastki wielomianu**1. Uzupełnij zdania.**

a) Równaniem algebraicznym x zmiennej nazywamy

.....

b) Rozwiązaniem równania algebraicznego (pierwiastkiem wielomianu W) nazywamy

c) Pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych wystarczy szukać wśród

2. Sprawdź, która z liczb jest pierwiastkiem danego wielomianu (uzupełnij tabelę).

Lp.	Równanie	Liczby	Obliczenia i odpowiedzi
1.	$x^2 - 5x + 4 = 0$	1, 2, 3, 4	
2.	$x^3 - 4x + 15 = 0$	2, -3, 5, 6	
3.	$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$	-1, 1, -3, 3	
4.	$x^3 - 11x^2 - 2x + 1 = 0$	-3, -2, 2, 3	
5.	$x^6 - x^3 - 32$	-1, 1, -2, 2	

3. Wymień liczby, które mogą być całkowitymi pierwiastkami wielomianu. Które z nich są tymi pierwiastkami?

a) $W(x) = x^3 + 3x^2 + x - 4$

b) $W(x) = -2x^4 + x^2 + 1$

c) $W(x) = x^4 + 6x^3 - 12x + 8$

d) $W(x) = -3x^3 + 2x + 3$

e) $W(x) = x^5 - 12x - 2$

8.3. Rozkład wielomianu na czynniki**1. Uzupełnij zdanie.**

Rozłożyć wielomian na czynniki to znaczy

.....

.....

2. Rozłóż podane wielomiany na czynniki.

a) $W(x) = x^3 + 3x + 2x + 6$

.....

.....

b) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$

.....

.....

c) $W(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

.....

.....

d) $W(x) = x^4 + x^3 + 2x + 2$

.....

.....

e) $W(x) = x^2 + 3x - 4$

.....

.....

f) $W(x) = -2x^2 + 3x - 1$

.....

.....

g) $W(x) = x^2 + 10x + 25$

.....

.....

h) $W(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

.....

.....

i) $W(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

.....

.....



c) $W(x) = x^4 - 4x^3 + x - 4$

d) $W(x) = x^3 + 8x^2 - 9$

e) $W(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$



h) $W(x) = x^3 + 13x^2 - 12$

j) $W(x) = x^3 - 5x^2 + 12$

Lp.	$W(x)$	$P(x)$	Obliczenia i odpowiedź
1.	$W(x) = x^2 - 5x + 7$	$x - 10$	
2.	$W(x) = x^5 - 3x^3 + 7x - 10$	$x + 1$	





Lp.	$W(x)$	$P(x)$	Obliczenia i odpowiedź
3.	$W(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 12$	$x - 2$	
4.	$W(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 2$	$x + 2$	
5.	$W(x) = -4x^4 - x$	$x - 3$	
6.	$W(x) = x^3 - 9x + 8$	$x + 4$	
7.	$W(x) = x^7 - 5x + 7$	$x - 1$	
8.	$W(x) = x^3 - 10x^2 - 4x - 4$	$x + 3$	
9.	$W(x) = 32x^4 - 6x - 1$	$x - \frac{1}{2}$	
10.	$W(x) = -x^2 - 5x + 17$	$x + \sqrt{2}$	

8.4. Równania stopnia trzeciego**1. Uzupełnij zdanie.**

Iloczyn czynników jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy

.....

.....

2. Rozwiąż równania:

a) $(x - 1)(x + 5)(x - 7) = 0$

.....

.....

b) $(x + 1)(2x + 5)(3x - 7) = 0$

.....

.....

c) $(x - 10)(x + 20)(x - 30) = 0$

.....

.....

d) $(x - 1)^2(4x - 12) = 0$

.....

.....

e) $(-x - 1)(x + 9)(5x - 6) = 0$

.....

.....

3. Rozwiąż równania.

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$

.....

.....

b) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

.....

.....

c) $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$

.....

.....

d) $2x^3 + 5x^2 + 6x + 15 = 0$

.....

.....





e) $3x^2 - x^2 - 9x + 3 = 0$

.....

.....

4. Rozwiąż równania.

a) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b) $x^3 + 5x^2 - 6 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $2x^3 - 13x^2 - 13x + 24 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

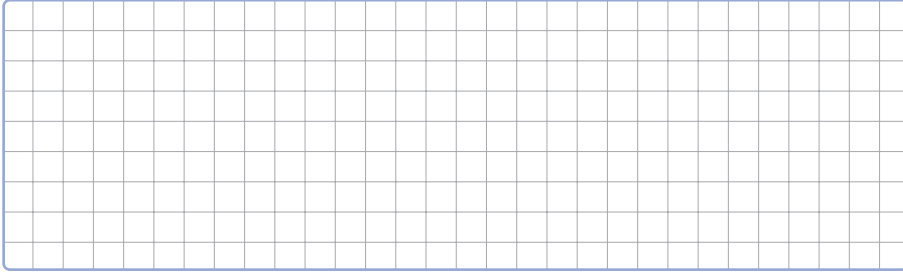
.....

.....

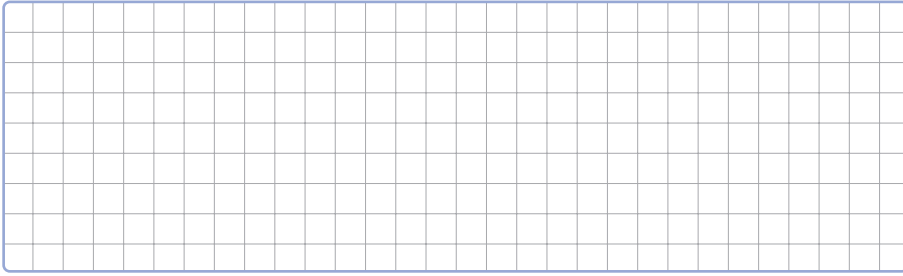
.....

.....

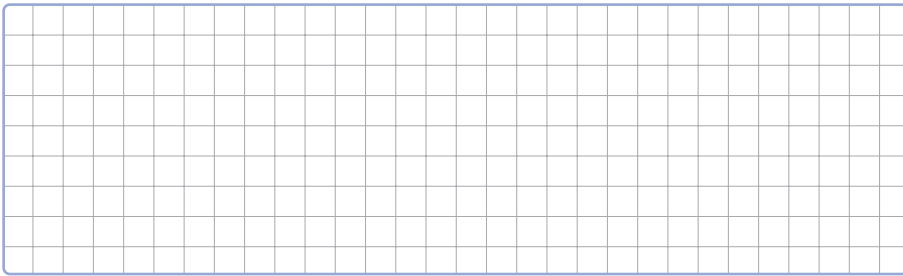
b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$



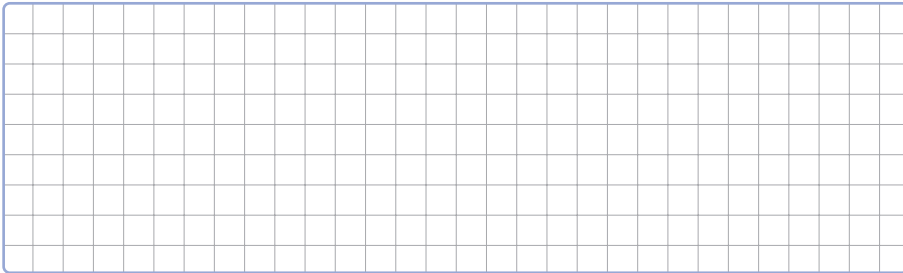
c) $2x^3 + x^2 - 2x + 1 < 0$



d) $-x^3 - 6x^2 + 16x + 96 > 0$



e) $x^3 - x^2 + 4x + 4 \geq 0$



4. Rozwiąż nierówności.

a) $x^3 - 5x^2 + 4 < 0$

b) $x^3 - 7x + 6 \leq 0$

c) $2x^3 + x^2 + 1 < 0$

II. Stereometria

9. Elementy trygonometrii

9.1. Wielkości trygonometryczne kąta ostrego

1. Uzupełnij definicje.

a) Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy

.....

.....

b) Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy

.....

.....

c) Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy

.....

.....

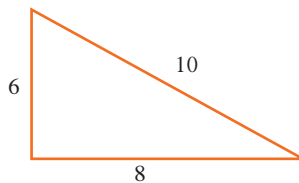
d) Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy

.....

.....

2. Oblicz funkcje trygonometryczne mniejszego z kątów ostrych w danych trójkątach.

a)



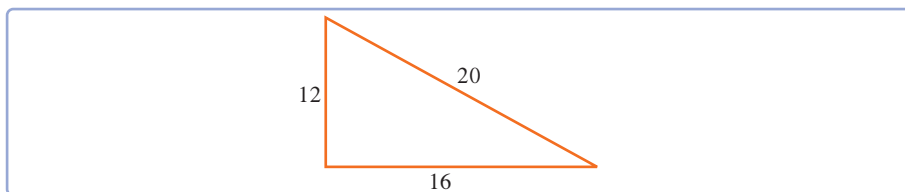
.....

.....





b)

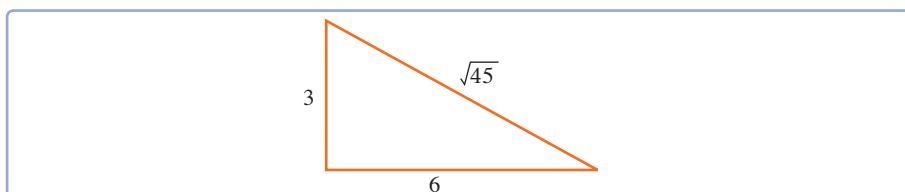


.....

.....

.....

c)

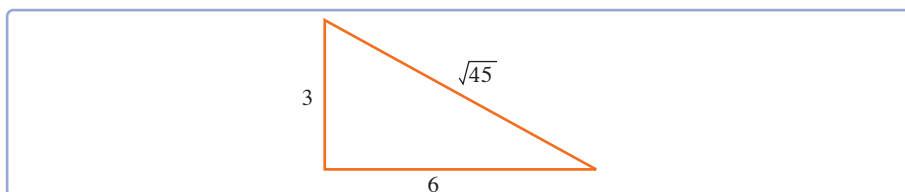


.....

.....

.....

d)

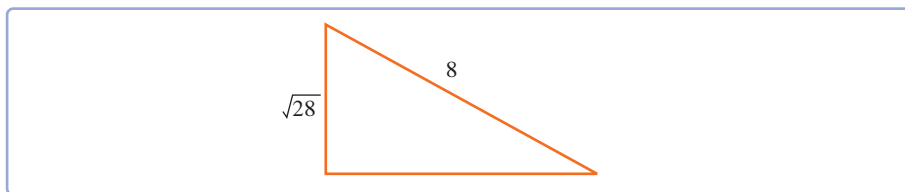


.....

.....

.....

e)

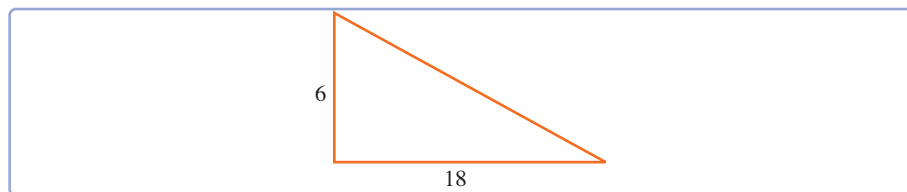


.....

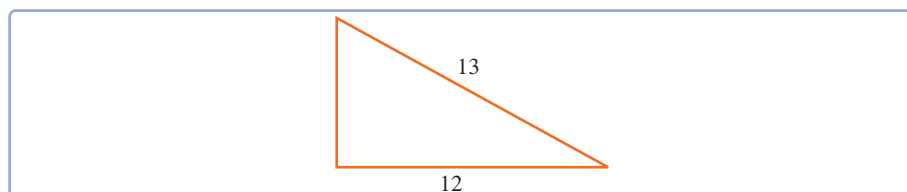
.....

.....

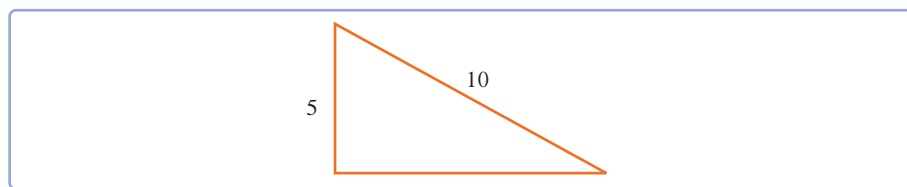
f)



g)

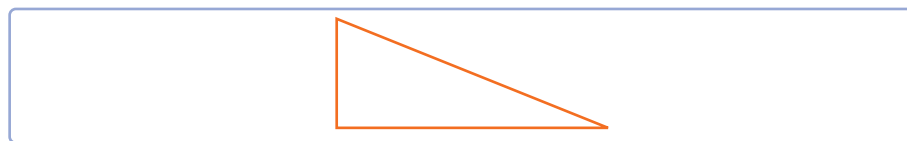


h)



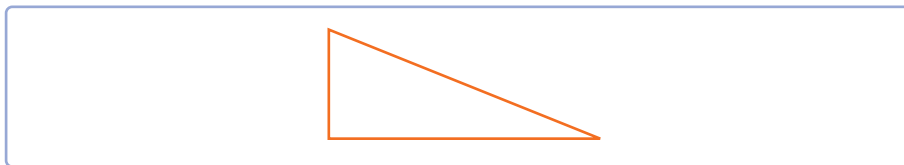
3. W trójkącie prostokątnym dany jest jeden z boków i wartość jednej z funkcji trygonometrycznych kąta leżącego naprzeciwko tego boku. **Oblicz pozostałe boki w tym trójkącie.**

a) $a = 4$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$





b) $a = 8, \cos \alpha = \frac{1}{4}$

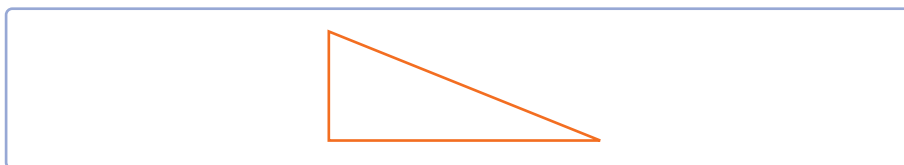


.....

.....

.....

c) $a = 10, \operatorname{tg} \alpha = 2$

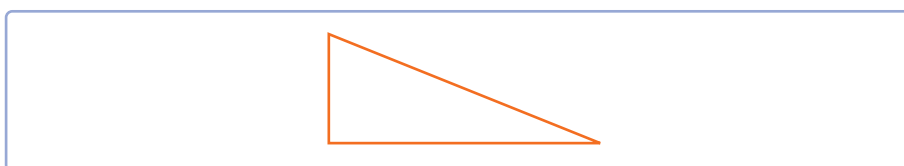


.....

.....

.....

d) $a = 4, \operatorname{ctg} \alpha = 1$

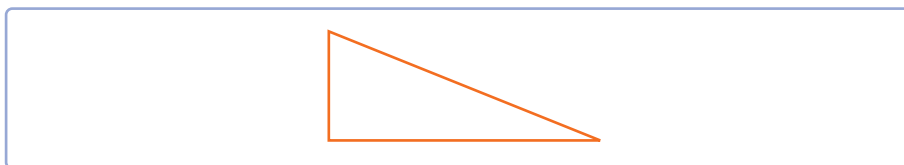


.....

.....

.....

e) $a = 2, \sin \alpha = \frac{3}{5}$

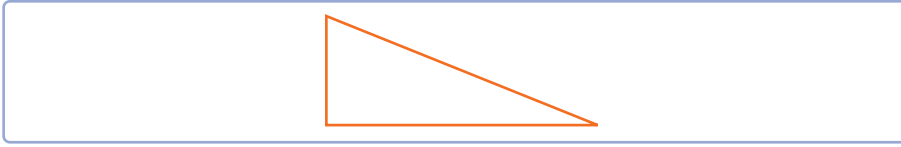


.....

.....

.....

f) $a = 6, \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$



4. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 60° , 45° , a następnie uzupełnij tabelę.



α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$			
$\cos \alpha$			
$\operatorname{tg} \alpha$			
$\operatorname{ctg} \alpha$			

5. Dany jest prostokąt o bokach 4 cm i 5 cm. Oblicz sinus kąta, jaki przekątna tworzy z dłuższym bokiem.



6. Dany jest prostokąt o jednym boku 10 cm. Tangens kąta, jaki przekątna tworzy z tym bokiem, wynosi 3. **Oblicz obwód prostokąta.**



7. Przekątna prostokąta tworzy z bokiem długości 12 kąt 60° . **Oblicz pole prostokąta.**



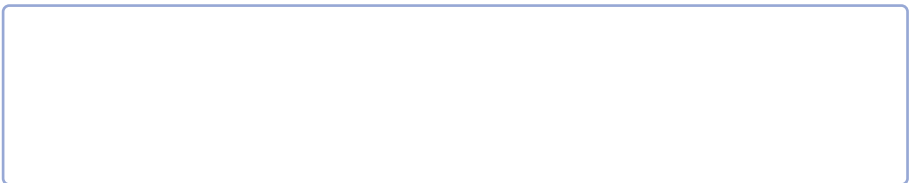
8. W trójkącie ABC wysokość dzieli bok na odcinki długości 2 i 4. Kąt przylegający do tego boku (przy dłuższym z odcinków podziału jest równy 45°). **Oblicz pozostałe boki trójkąta.**



9.2. Praktyczne zastosowania trygonometrii

1. Jaki cień rzuca mur o wysokości 2 m w momencie, gdy promienie słoneczne padają pod kątem:

a) 20° ?



b) 30° ?

2. Długość cienia słupka ogrodzenia wynosi 3,5 m w momencie, gdy promienie słoneczne padają pod kątem 22° . Jakiej wysokości jest ten słupek?

3. Budynek o wysokości 15 m rzuca cień o długości 10 m. Pod jakim kątem padają wówczas promienie słoneczne?

4. Korzystając z funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, oblicz pozostałe boki i kąty trójkąta prostokątnego, mając dane:

a) $a = 6$, $\alpha = 45^\circ$





b) $b = 6, \alpha = 30^\circ$

c) $c = 24, \beta = 45^\circ$

d) $a = 8, \alpha = 60^\circ$

e) $a = 16, \alpha = 40^\circ$

5. Oblicz długości boków trapezu równoramiennego o dłuższej podstawie 20, wysokości 8 i kącie ostrym 30° .

6. Oblicz pole i obwód prostokąta o przekątnej 12 cm tworzącej z jednym z boków kąt 28° .

7. Wysokość trójkąta ma długość 6 i tworzy z bokami kąty 18° i 38° . Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

8. Oblicz pole i obwód prostokąta o przekątnej 12 cm i kącie między przekątnymi 120° .

9. Oblicz pole prostokąta o przekątnej 5 cm, jeśli wiesz, że stosunek długości boków wynosi 1:2.

10. W trapezie równoramiennym podstawy mają długość 8 i 12, a wysokość 4. Oblicz kąty trapezu.

10. Przestrzeń trójwymiarowa

10.1. Stereogramy

1. Uzupełnij zdania.

a) Stereometria to

.....

b) Stereogram to

Zasada działania opiera się na dwóch typach złudzeń przestrzennych:

.....

2. Obejrzyj stereogramy w podręczniku na stronach 113–118. Jeśli nie widzisz od razu efektu trójwymiarowości, to spróbuj patrzeć dłużej, „wpatrując” się w jeden punkt przed obrazkiem.

10.2. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni

1. Uzupełnij zdania.

a) Dwa różne punkty w przestrzeni wyznaczają

.....

b) Trzy niewspółliniowe punkty w przestrzeni wyznaczają

.....

c) Prosta i punkt nienależący do niej w przestrzeni wyznaczają

.....

d) Dwie różne przecinające się proste w przestrzeni wyznaczają

.....

2. Uzupełnij definicje.

a) Dwie proste w przestrzeni są wzajemnie równoległe, jeżeli

.....

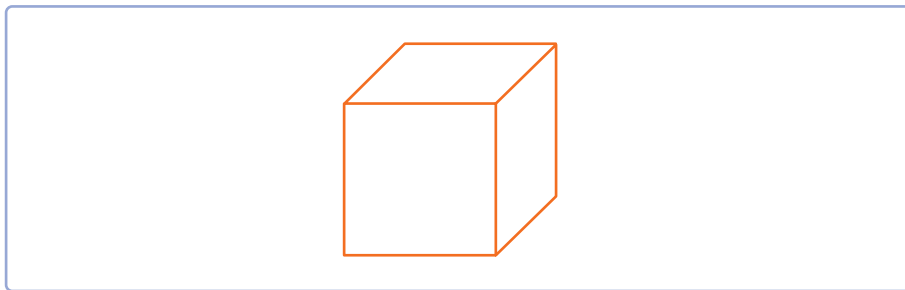
.....

b) Prostymi skośnymi nazywamy

.....

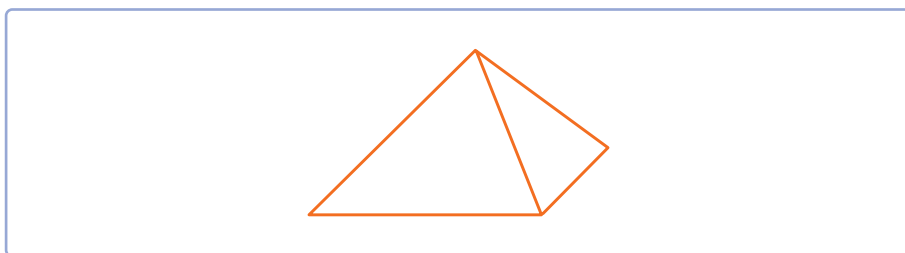
.....

3. Na narysowanym sześcianie dorysuj brakujące krawędzie, oznacz wierzchołki, a następnie wypisz krawędzie zawarte w prostych: a) równoległych, b) skośnych.



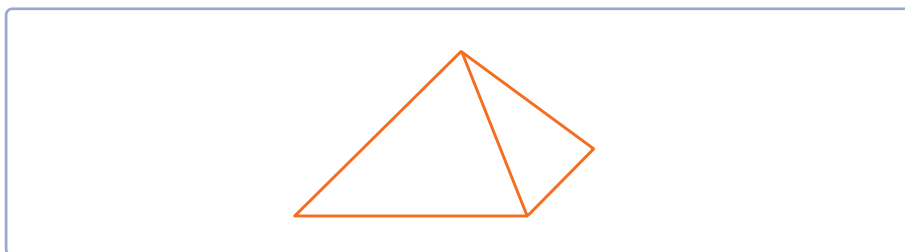
- a)
-
- b)
-

4. Na narysowanym ostrosłupie trójkątnym dorysuj brakujące krawędzie, oznacz wierzchołki, a następnie wypisz krawędzie zawarte w prostych: a) równoległych, b) skośnych.



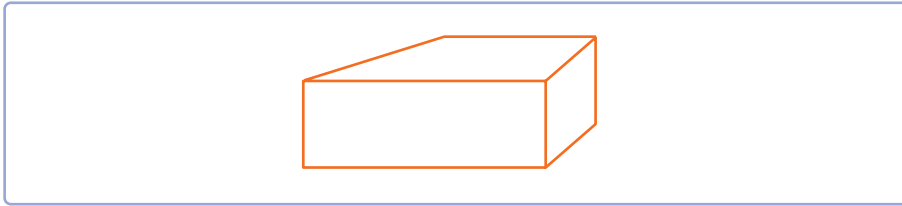
- a)
-
- b)
-

5. Na narysowanym ostrosłupie czworokątnym dorysuj brakujące krawędzie, oznacz wierzchołki, a następnie wypisz krawędzie zawarte w prostych: a) równoległych, b) skośnych.



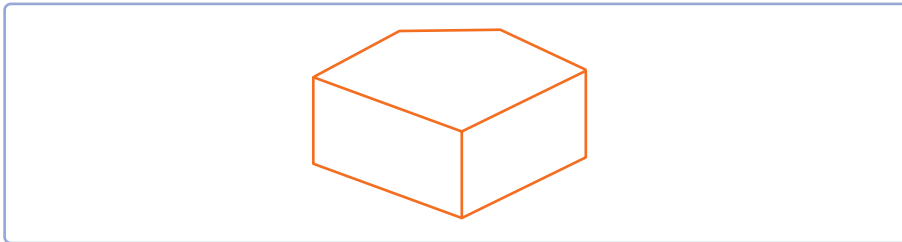
- a)
-
- b)
-

6. Na narysowanym graniastostłupie dorysuj brakujące krawędzie, oznacz wierzchołki, a następnie wypisz krawędzie zawarte w prostych: a) równoległych, b) skośnych.



- a)
-
- b)
-

7. Na narysowanym graniastostłupie dorysuj brakujące krawędzie i wypisz krawędzie zawarte w prostych: a) równoległych, b) prostokątnych.



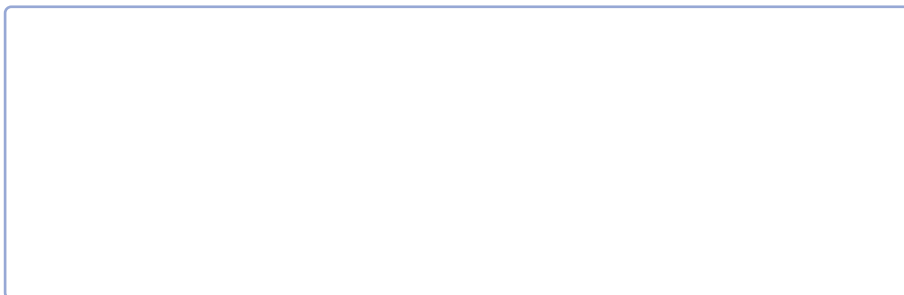
- a)
-
- b)
-

8. Dana jest prosta i punkt nienależący do niej. Podaj, ile różnych (wymienionych niżej) prostych w przestrzeni można poprowadzić do danej prostej.

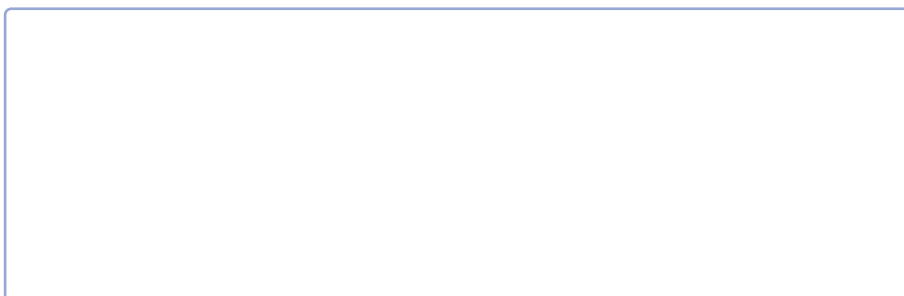
- a) równoległych
- b) skośnych
- c) mających z daną prostą jeden punkt wspólny

9. Dane są w przestrzeni 4 różne punkty. Ile różnych prostych można przez nie przeprowadzić. Rozważ różne położenie punktów.

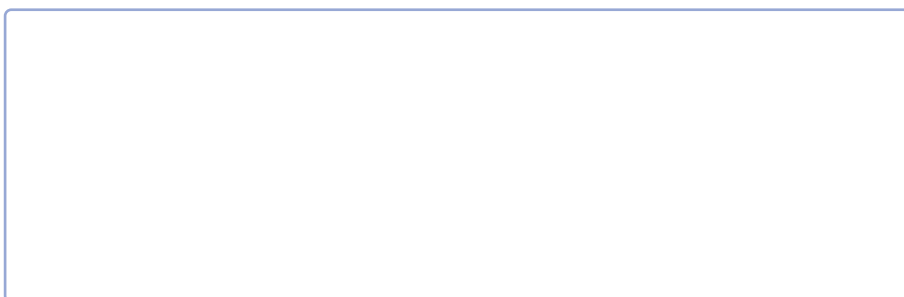
a)



b)

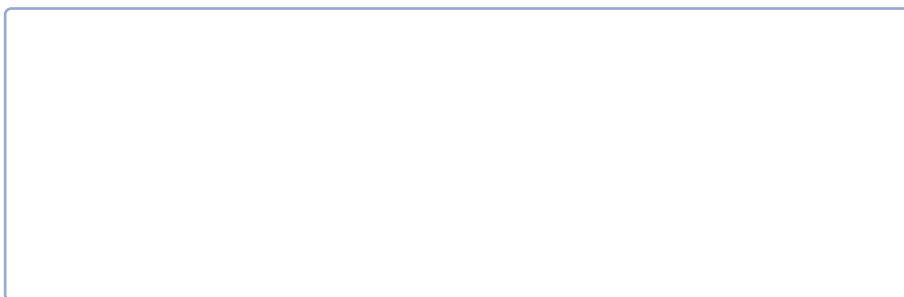


c)



10. Dane są w przestrzeni 4 różne punkty. Ile różnych płaszczyzn można przez nie przeprowadzić. Rozważ różne położenie punktów.

a)



b)

c)

10.3. Kąt między prostą a płaszczyzną**1. Uzupełnij zdania.**a) Kąt między prostą a płaszczyzną wynosi 0° (albo 180°), jeśli

b) Prosta, która nie zawiera się w płaszczyźnie i nie jest do niej równoległa, ma z tą płaszczyzną

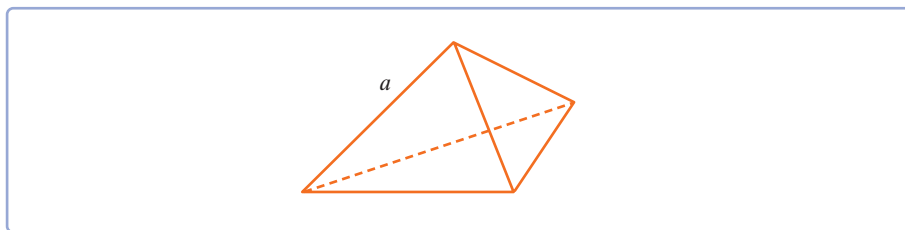
2. Uzupełnij definicje.

a) Kąt między prostą i płaszczyzną to kąt

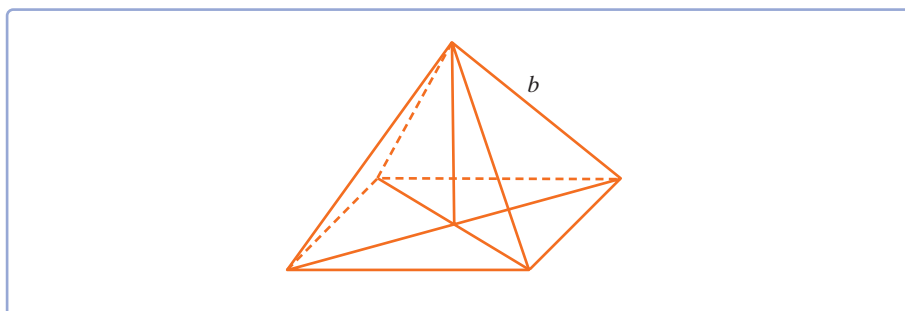
b) Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeśli

3. Zaznacz kąt między podpisaną na rysunku krawędzią lub odcinkiem a płaszczyzną podstawy w narysowanych bryłach.

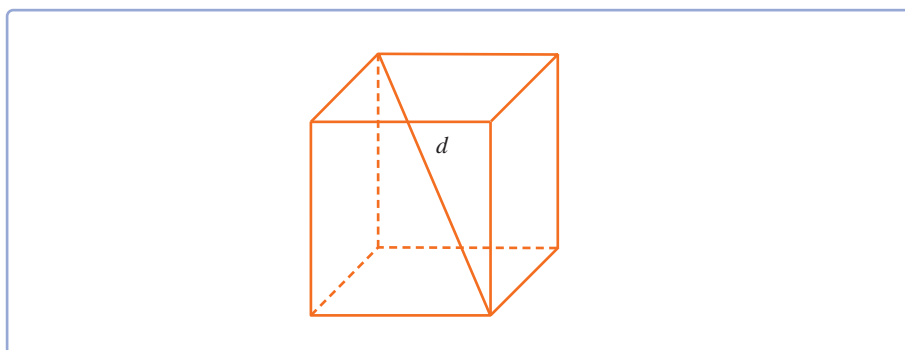
a)



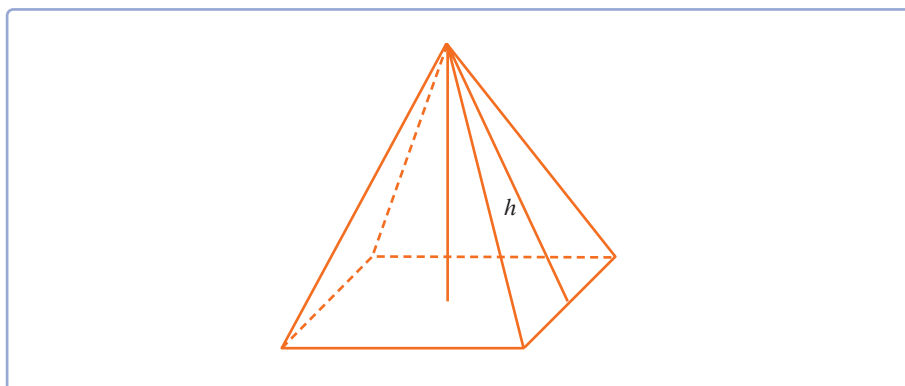
b)



c)



d)



10.4. Kąt dwuścienny**1. Uzupełnij zdania.**

a) Dwie płaszczyzny w przestrzeni są równoległe, jeśli

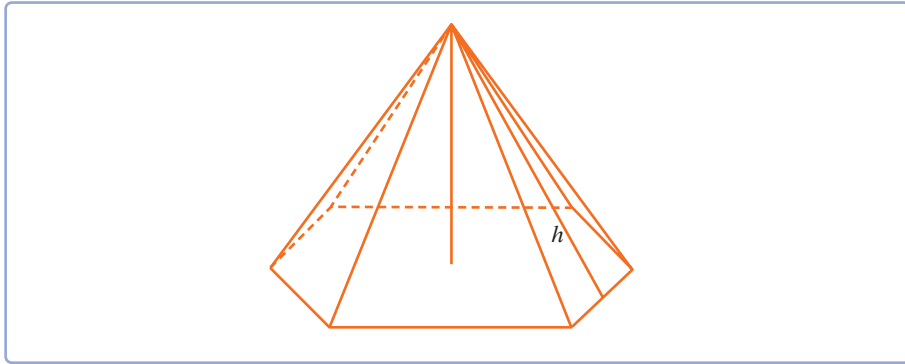
.....

b) Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy

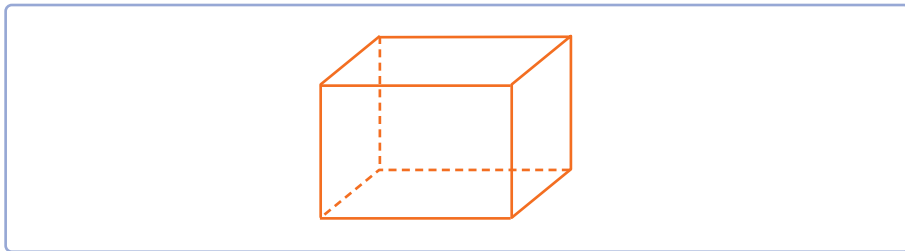
.....

2. W narysowanej bryle zaznacz kąt dwuścienny między podstawą i ścianą boczną.

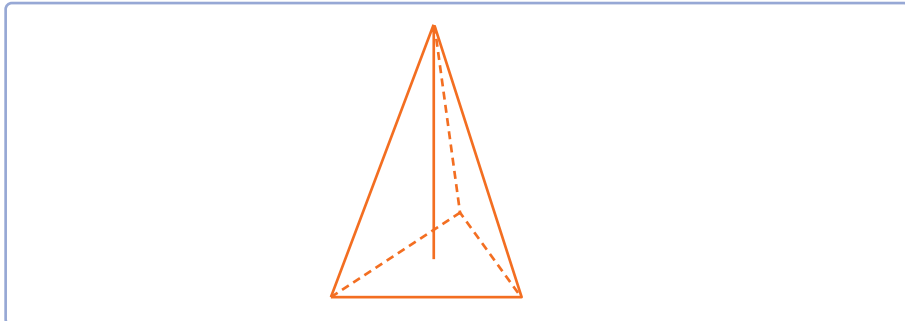
a)



b)

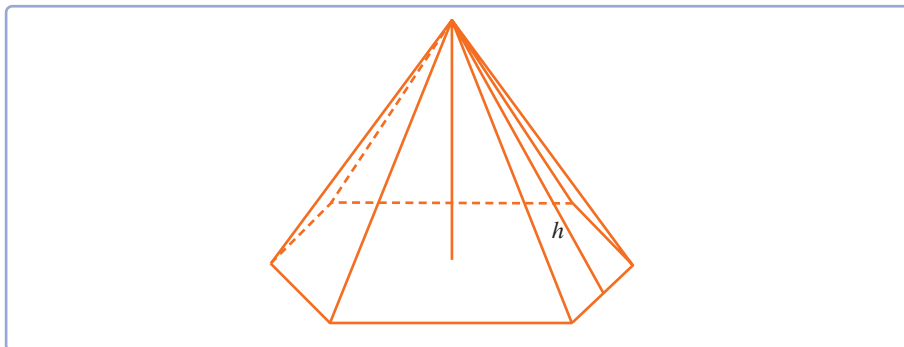


c)

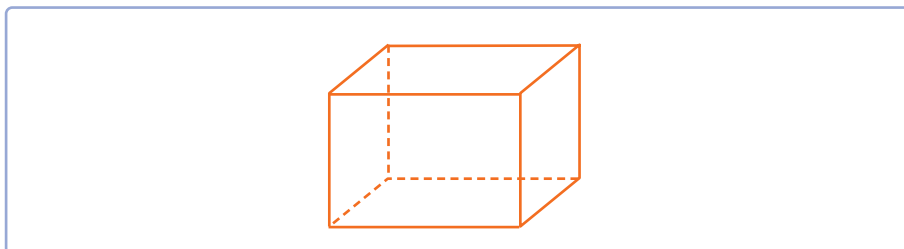


3. W narysowanej bryle zaznacz kąt dwuścienny między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.

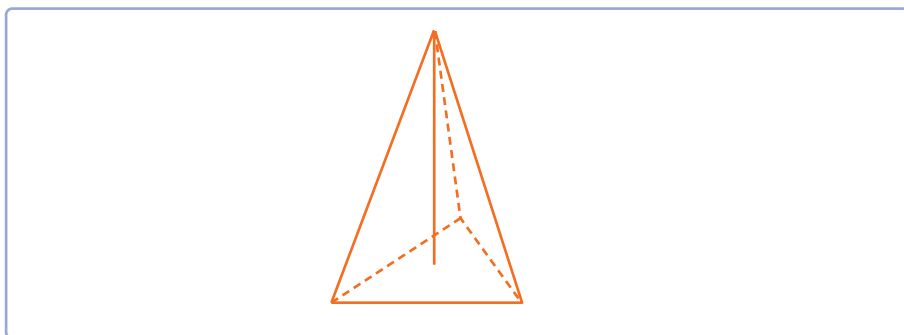
a)



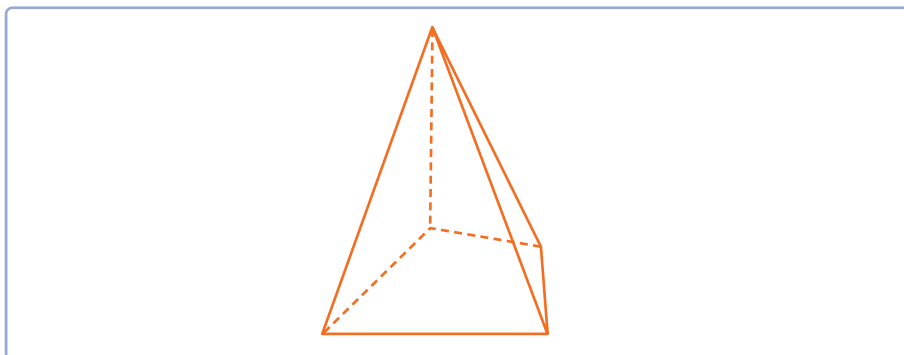
b)



c)



d)



11. Wielościany

11.1. Klasyfikacja wielościanów

1. Uzupełnij definicje.

a) Półprzestrzeń to zbiór punktów przestrzeni, które

.....

b) Czworoscian to

.....

c) Wielościan to

.....

2. Uzupełnij twierdzenie.

Jeśli w wielościanie wypukłym W jest liczbą wierzchołków, K – liczbą krawędzi, a S – liczbą ścian, to

.....

3. Kiedy figurę nazywamy figurą wypukłą?

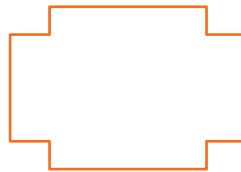
.....

4. Które z narysowanych figur są wypukłe?

a)



b)



c)

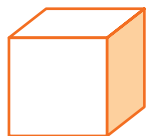


d)

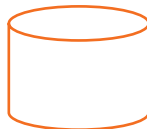




e)



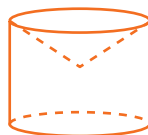
f)



g)



h)



5. Uzupełnij definicje.

a) Graniastosep nazywamy

.....

.....

.....

b) Ostrostosep nazywamy

.....

.....

.....

6. Narysuj dowolny graniastosep i zaznacz na nim wszystkie wierzchołki i krawędzie. Wypisz krawędzie boczne i krawędzie podstawy.

Krawędzie boczne:

Krawędzie podstawy:

7. Narysuj dowolny ostrosłup i zaznacz na nim wszystkie wierzchołki i krawędzie. Wypisz krawędzie boczne i krawędzie podstawy.



Krawędzie boczne:

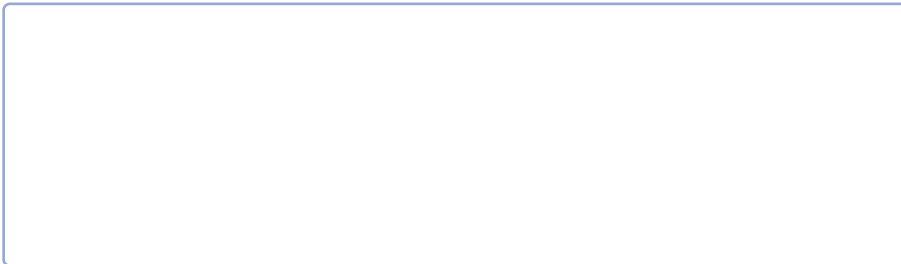
Krawędzie podstawy:

8. Uzupełnij zdanie.

Graniastosłup nazywamy prostym, jeśli

.....

9. Narysuj dowolny graniastosłup prosty i dowolny graniastosłup pochyły.

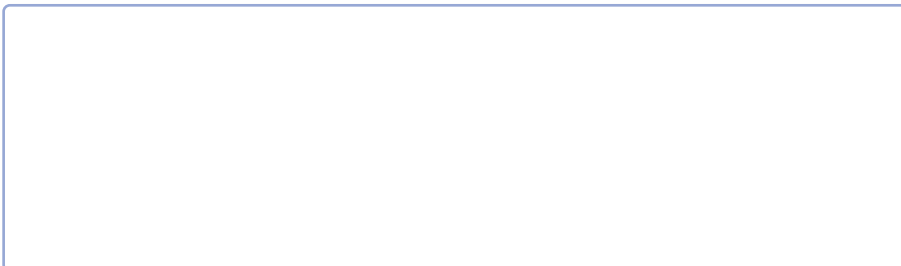


10. Uzupełnij zdanie.

Ostrosłup nazywamy prostym, jeśli

.....

11. Narysuj dowolny ostrosłup prosty i dowolny ostrosłup pochyły.



12. Uzupełnij zdanie.

Wysokością graniastosłupa nazywamy

.....

.....

13. Narysuj dowolny graniastosłup prosty lub pochyły. Zaznacz na nim wysokość.

.....

14. Uzupełnij zdanie.

Wysokością ostrosłupa nazywamy

.....

.....

15. Narysuj dowolny ostrosłup prosty lub pochyły. Zaznacz na nim wysokość.

.....

16. Uzupełnij zdanie.

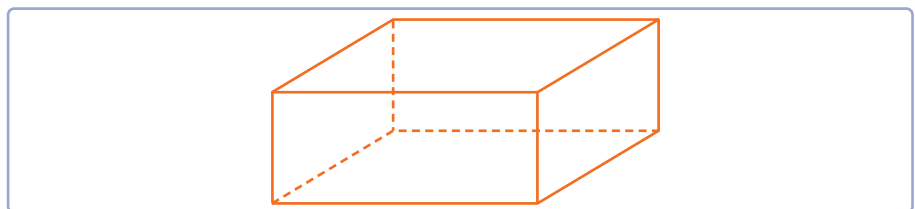
Przekątna graniastosłupa to

.....

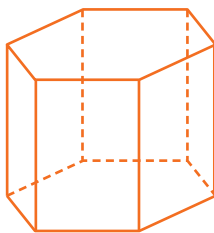
.....

17. Narysuj wszystkie przekątne narysowanego graniastosłupa.

a)



b)



18. Jaki graniastosłup (ostrosłup) nazywamy prawidłowym?

.....

.....

.....

19. Narysuj:

a) graniastosłup prawidłowy czworokątny

.....

.....

.....

.....

.....

b) graniastosłup prawidłowy trójkątny

.....

.....

.....

.....

.....

c) ostrosłup prawidłowy pięciokątny

.....

.....

.....

.....

.....





d) ostrosłup prawidłowy sześciokątny

20. Narysuj ostrosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz na nim kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy oraz kąt β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

21. Narysuj graniastosłup prawidłowy trójkątny i zaznacz na nim kąt α nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy oraz kąt β między przekątną ściany bocznej i wysokością graniastosłupa.

22. Narysuj sześcian i zaznacz na nim kąt α nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy oraz kąt β nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.

23. Narysuj czworościan foremny i zaznacz na nim kąt α nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy oraz kąt β nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.



11.2. Siatki wybranych wielościanów

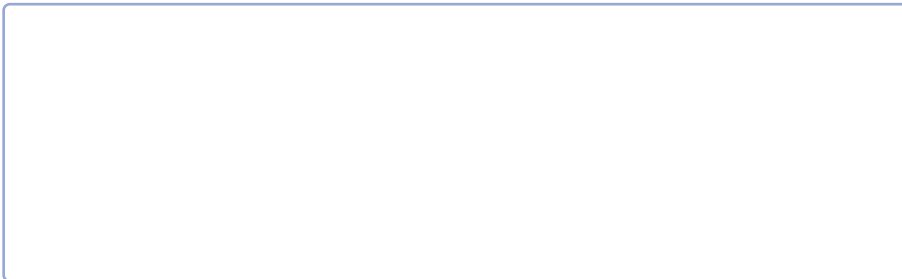
1. Narysuj dwie różne siatki sześcianu.



2. Narysuj dwie dowolne siatki czworościanu foremnego.



3. Narysuj dwie dowolne siatki ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego.



4. Narysuj dwie dowolne siatki ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.

5. Narysuj dwie dowolne siatki prostopadłościanu o krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka różnej długości.

11.3. Pole powierzchni graniastosłupa i ostrosłupa

1. Podaj wzory na pole powierzchni całkowitej

a) graniastosłupa:

b) ostrosłupa:

2. Oblicz pole całkowite sześcianu o krawędzi

a) $a = 5 \text{ cm}$

b) $a = \sqrt{3} \text{ cm}$

3. Prostopadłościan ma wysokość $h = 10$, jedną z krawędzi podstawy 8 i przekątną podstawy 10. **Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu.**

4. Prostopadłościan ma przekątną $d = 18$ i krawędzie podstawy równe 3 i 5. **Oblicz pole powierzchni całkowitej.**

5. Pole boczne prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 40, a jego wysokość 4. **Oblicz pole podstawy.**

6. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 6 i tworzy z krawędzią podstawy kąt 60° . **Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.**

7. Powierzchnia całkowita sześcianu jest równa 96 cm^2 . **Oblicz długość przekątnej sześcianu.**

8. Przekątna ściany bocznej prostopadłościanu ma długość 4 i tworzy z krawędzią boczną kąt 45° , a przekątna prostopadłościanu ma długość 6. **Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.**

9. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy $a = 8$ i wysokości $H = 12$.

10. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego jest równe 36 cm^2 . Oblicz długość krawędzi i wysokość czworościanu.

11. Kąt między ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego a jego podstawą jest równy 45° . Przekątna podstawy tego ostrosłupa ma długość 12. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

12. Podstawą ostrosłupa prostego jest romb o boku $a = 8$ i kącie ostrym $\alpha = 60^\circ$. Krawędź boczna ostrosłupa ma długość 20. **Oblicz pole całkowite.**

13. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o polu 18 i stosunku boków 2:1. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 40. **Oblicz długość krawędzi ostrosłupa.**

11.4. Objętość graniastosłupa i ostrosłupa

1. Uzupełnij zdania.

a) Objętość graniastosłupa jest równa

b) Objętość ostrosłupa jest równa

2. Oblicz objętość sześcianu, mając dane:a) długość krawędzi $a = 3 \text{ cm}$ b) długość przekątnej ściany $d = 3 \text{ cm}$ c) długość przekątnej sześcianu $d = 12 \text{ cm}$ 



d) pole całkowite równe 120 cm^2

3. Oblicz objętość prostopadłościanu o podstawie kwadratowej, mając dane:

a) pole ściany bocznej 24 i pole podstawy 16

b) długość przekątnej prostopadłościanu 5 i długość krawędzi podstawy 2

c) długość przekątnej prostopadłościanu 7 i jej kąt nachylenia do płaszczyzny podstawy 60°

d) długość przekątnej prostopadłościanu 5 i kąt, jaki tworzy z wysokością prostopadłościanu 30°

4. Oblicz objętość graniastoslupa prawidłowego trójkątnego, mając dane:

a) krawędź podstawy 4 i wysokość 10





b) długość przekątnej ściany bocznej 4 i kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy 60°

c) długość przekątnej ściany bocznej 10 i pole podstawy $9\sqrt{3}$

d) długość przekątnej ściany bocznej d i jej kąt nachylenia do krawędzi bocznej α

5. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego:

a) o krawędzi podstawy 6 i wysokości ściany bocznej 5

b) o polu podstawy 36 i krawędzi bocznej 8

c) o wysokości h i krawędzi bocznej b





d) o krawędzi bocznej b i jej kącie nachylenia do płaszczyzny podstawy α

6. Oblicz objętość czworościanu foremnego:

a) o krawędzi 16

b) o polu całkowitym $100\sqrt{3} \text{ cm}^3$

7. Podstawą ostrosłupa prostego jest romb o boku 7 i przekątnej 7. Wysokość ostrosłupa jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. **Oblicz objętość ostrosłupa.**

8. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . **Oblicz objętość ostrosłupa.**

9. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $\sqrt{3}$, a kąt między wysokością ostrosłupa i krawędzią boczną ma miarę 30° . **Oblicz objętość ostrosłupa.**

10. Najdłuższa przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 20, a kąt między ścianą boczną i podstawą 45° . **Oblicz objętość ostrosłupa.**

11. Pole całkowite ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 80, a wysokość ściany bocznej jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. **Oblicz objętość ostrosłupa.**

12. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o przekątnej 10 i jednym boku 6. Wysokość ostrosłupa tworzy z krawędzią boczną kąt 60° . **Oblicz objętość ostrosłupa.**

12. Bryły obrotowe

12.1. Wprowadzenie

1. Uzupełnij definicje.

a) Walcem obrotowym nazywamy

.....

.....

b) Stożkiem obrotowym nazywamy

.....

.....

c) Kulą nazywamy

.....

.....

2. Narysuj walec i zaznacz na nim przekrój osiowy.



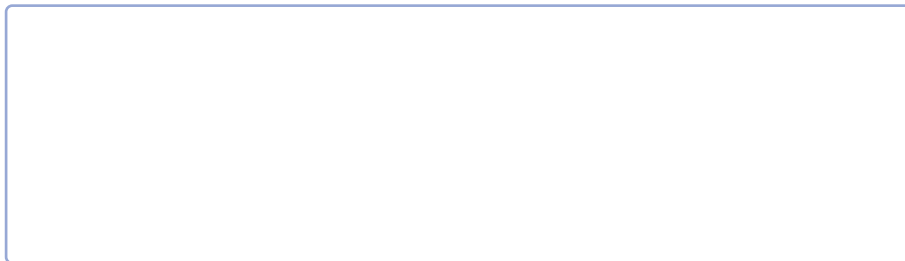
3. Narysuj walec i zaznacz na nim przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy walca.



4. Narysuj stożek i zaznacz na nim przekrój osiowy.

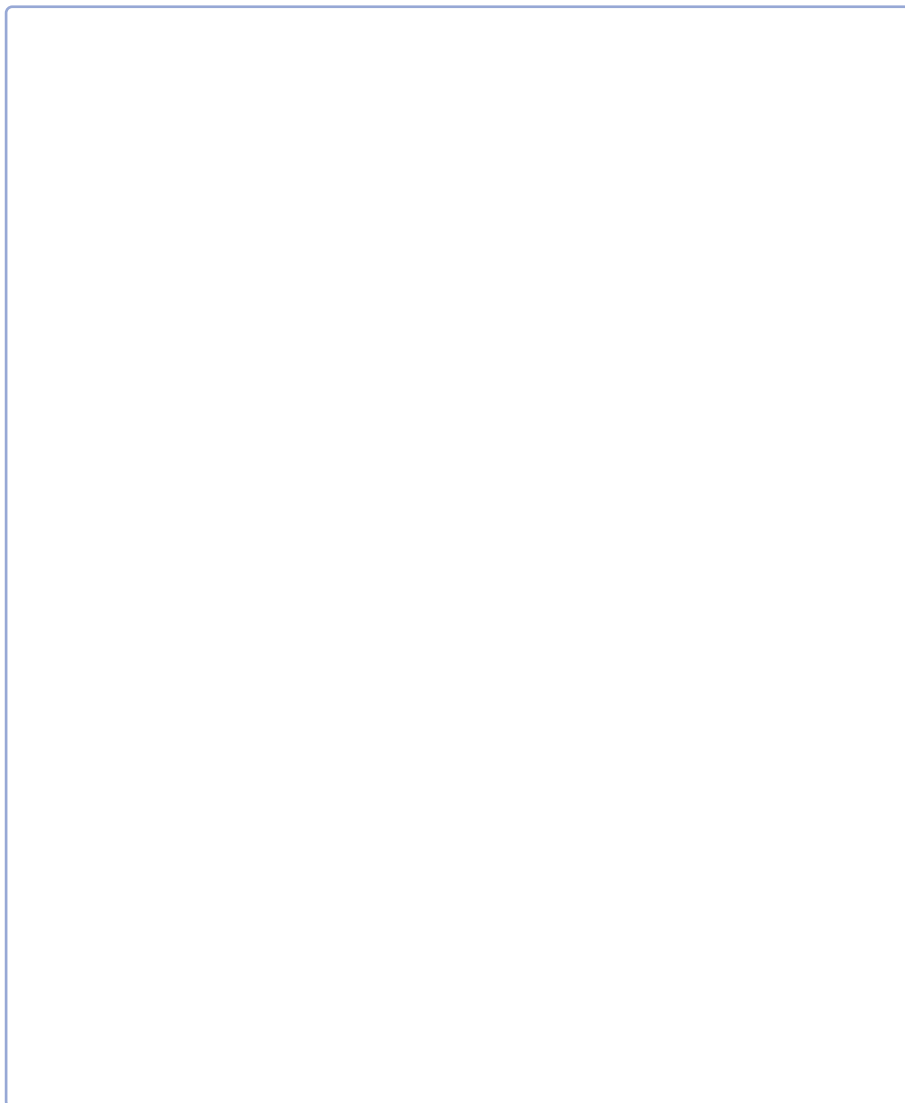


5. Narysuj stożek i zaznacz na nim przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy.



12.2. Siatki walca i stożka

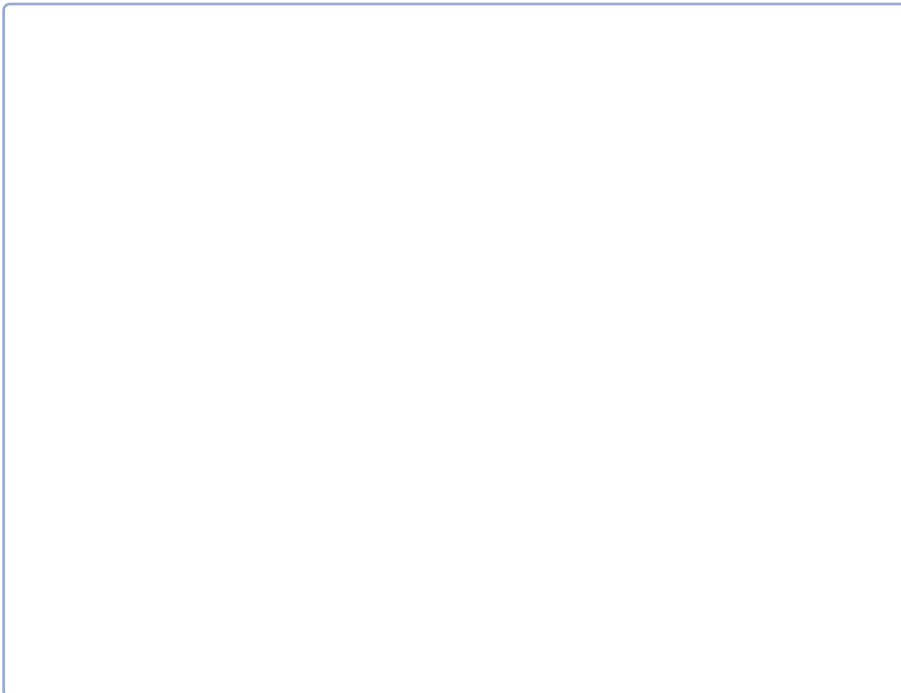
1. Narysuj siatkę walca o wysokości 3 cm i promieniu podstawy 2 cm.



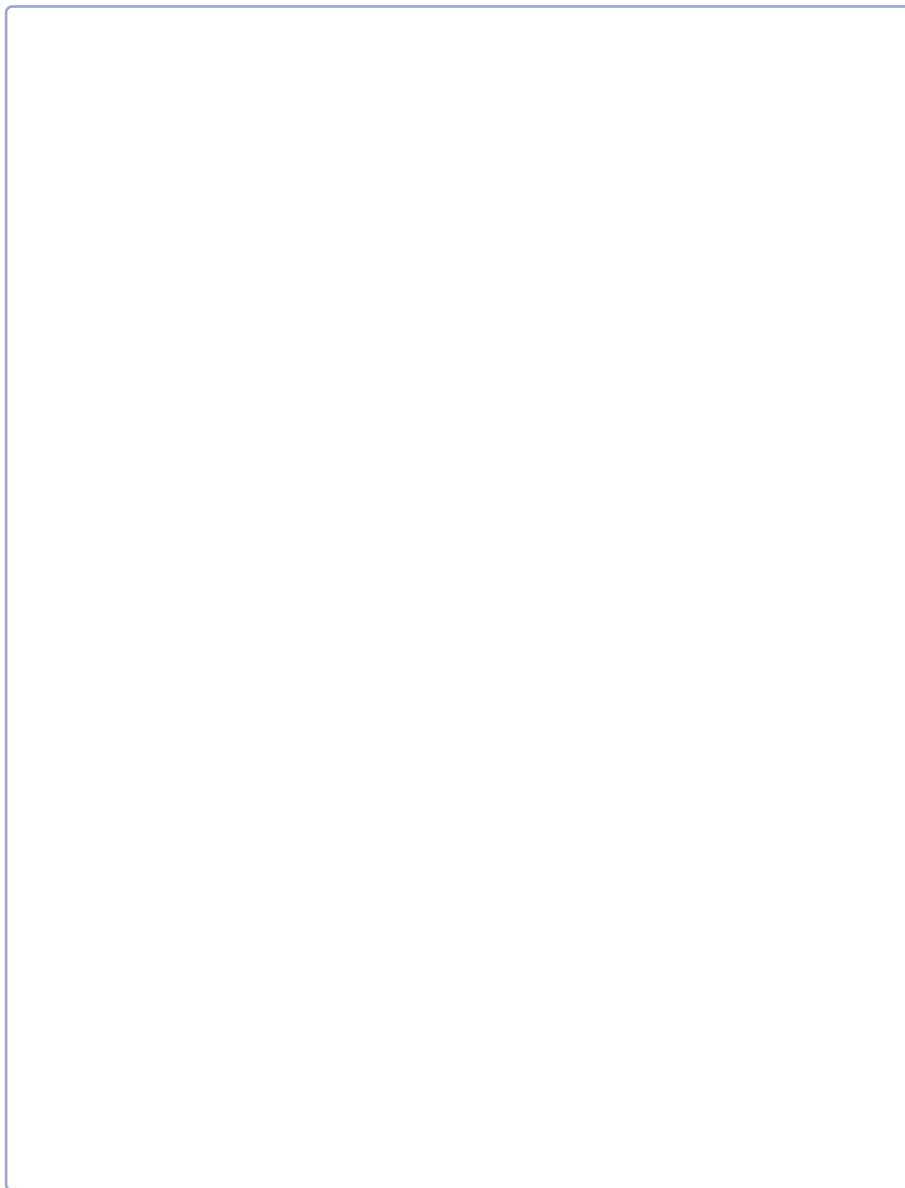
2. Narysuj siatkę walca o wysokości 2 cm i promieniu podstawy 1 cm.



3. Narysuj siatkę stożka, jeśli wiesz, że jego powierzchnia boczna jest półkolem o promieniu 2 cm.



4. Narysuj siatkę stożka o wysokości 4 cm i promieniu podstawy 3 cm.



5. Uzupełnij zdania.

- a) Siatka kuli
- b) Sferą nazywamy
- c) Dowolny przekrój kuli jest
- d) Dowolny przekrój sfery jest
- e) Kółem wielkim kuli nazywamy

12.3. Pole powierzchni oraz objętość walca, stożka i kuli**1.** Narysuj walec. Zaznacz na nim promień podstawy i wysokość.**2.** Narysuj stożek. Zaznacz na nim promień podstawy, wysokość i tworzącą.**3.** Uzupełnij tabelę.

Bryła	Walec	Stożek	Kula
Pole powierzchni całkowitej.			
Objętość			

4. Oblicz objętość i pole całkowite bryły powstałej z:

a) obrotu kwadratu o boku 5 cm dookoła jednego z boków





b) obrotu kwadratu o boku 5 cm dokoła przekątnej

5. Oblicz objętość i pole całkowite bryły powstałej z:

a) obrotu prostokąta o bokach 4 i 8 dokoła krótszego z boków

b) obrotu prostokąta o bokach 4 i 8 dokoła dłuższego z boków

c) obrotu prostokąta o boku 5 i przekątnej 13 dokoła krótszego z boków

6. Oblicz objętość i pole całkowite bryły powstałej z:

a) obrotu trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 4 i 6 dokoła najkrótszego boku

b) obrotu trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 16 i kącie ostrym 30° dokoła najkrótszego boku





c) obrotu trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 10 i kącie ostrym 60° do koła najdłuższego boku

7. Oblicz objętość i pole całkowite bryły powstałej z:

a) obrotu koła o promieniu 1 do koła osi symetrii tego koła

b) obrotu koła o średnicy 8 do koła osi symetrii tego koła

8. Oblicz pole całkowite i objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym o polu $16\sqrt{3}$.

9. Oblicz kąt rozwarcia stożka, jeśli wiesz, że pole całkowite tego stożka jest trzy razy większe od pola jego podstawy.

10. Szklanka ma kształt walca o promieniu 3 cm i wysokości 6 cm, a kieliszek ma kształt stożka o promieniu podstawy 2 cm i wysokości 3 cm. **W ilu kieliszkach zmieści się sok z napełnionych do pełna 5 szklanek?**

11. Oblicz pole całkowite i objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem o podstawie 12 i kącie przy podstawie 30° .

12. Oblicz pole całkowite i objętość stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem prostokątnym o przeciwprostokątnej 20.

13. Stożek i walec mają równe objętości i równe wysokości. Oblicz stosunek promieni podstaw obu brył.

.....

.....

.....

.....

14. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu 16. Oblicz objętość i pole całkowite walca.

.....

.....

.....

.....

15. Kula i stożek mają równe objętości i promień kuli jest dwa razy większy od promienia podstawy stożka. Jaki jest stosunek promienia kuli do wysokości stożka?

III. Elementy statystyki

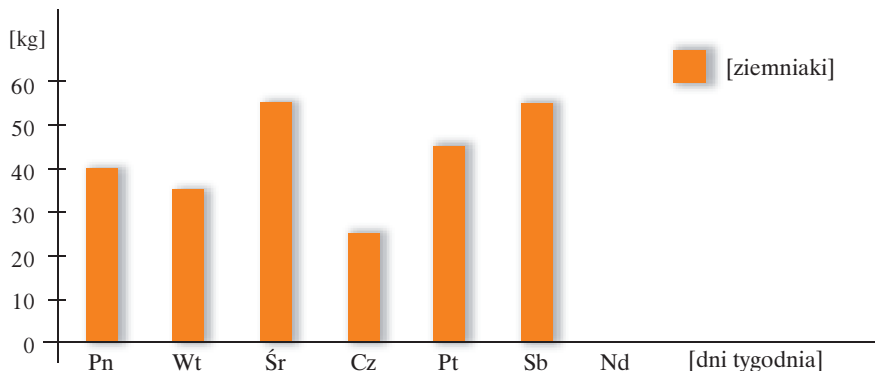
13. Sposoby prezentacji danych

13.1. Wprowadzenie

1. Czym zajmuje się statystyka?

13.2. Diagram kolumnowy (pionowy)

1. Poniższym diagram przedstawia liczbę sprzedanych ziemniaków (w kilogramach) w poszczególnych dniach tygodnia w pewnym sklepie warzywniczym. **Odpowiedz na pytania.**



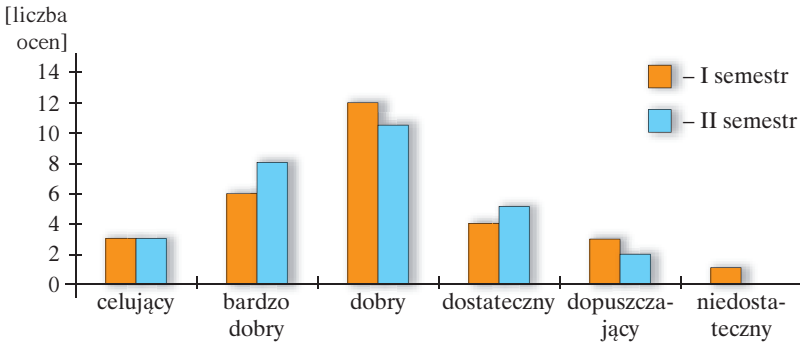
a) W którym dniu sprzedano najwięcej ziemniaków?

b) W którym dniu sprzedano najmniej ziemniaków?

c) Ile sprzedano kilogramów ziemniaków w poniedziałek?

d) W jakie dni sprzedano więcej ziemniaków niż w poniedziałek?

2. Poniższy diagram pokazuje oceny klasy II B z dwóch semestrów. **Analizując wykres, odpowiedz na poniższe pytania.**



a) Jakich ocen było najwięcej, a jakich najmniej w I semestrze?

b) Jakich ocen było tyle samo w obu semestrach?

c) W którym semestrze nie było ocen niedostatecznych?

d) Ilu uczniów miało w I semestrze oceny dostateczne?

e) Ile osób podniosło swoje wyniki w II semestrze?

f) Ilu uczniów liczy klasa II B, jeżeli w żadnym semestrze nie doszedł ani nie odszedł żaden uczeń?

3. W pewnym sklepie komputerowym w ciągu pięciu dni sprzedano towary, które wymienione są w poniższej tabeli. **Podane dane przedstaw w postaci diagramu kolumnowego (pionowego).** Pamiętaj, aby dokładnie opisać diagram i zastosować odpowiednią skalę.

Jakich towarów sprzedano najwięcej, a jakich najmniej?

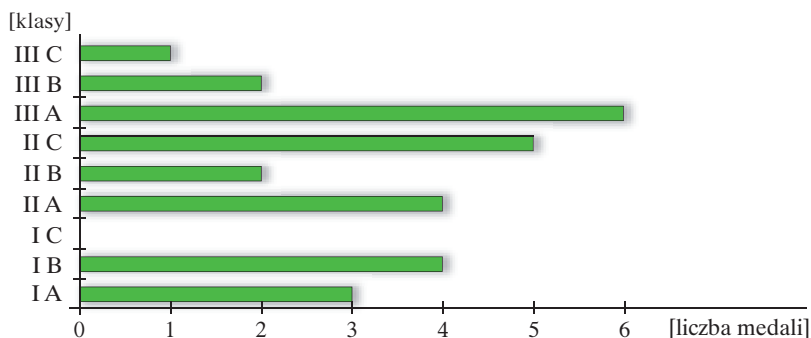
Nazwa	Liczba
drukarki	12
głośniki	3
karty graficzne	15
klawiatury	9
monitory	18
myszki	6





13.3. Diagram słupkowy (poziomy)

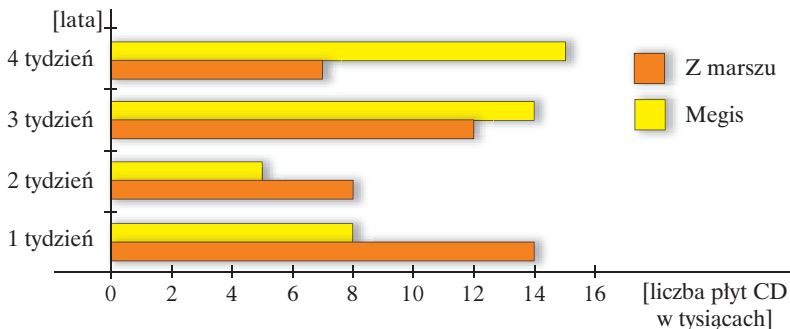
1. Na diagramie przedstawiono liczbę medali zdobytych przez uczniów w zawodach sportowych w klasach I–III.



Odpowiedz na pytania.

- Która klasa zdobyła najwięcej medali?
- Które klasy zdobyły więcej medali niż 3?
- Która klasa nie zdobyła żadnego medalu?
- O ile więcej medali zdobyła klasa II C niż klasa I A?
- Ile medali zdobyła klasa III B?
- Ile medali zdobyły łącznie wszystkie klasy I?

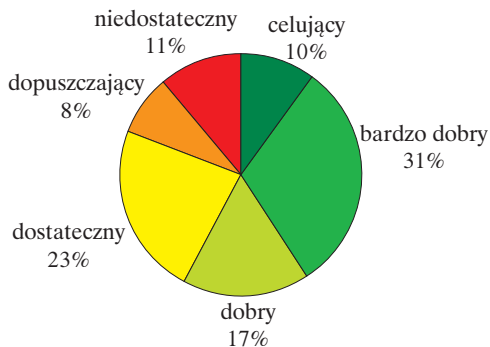
3. Dwa zespoły piosenki poetyckiej „Megis” oraz „Z Marszu” w roku 2005 wydały swoje pierwsze płyty. Wykres poniżej przedstawia sprzedaż płyt w poszczególnych tygodniach. **Analizując wykres, odpowiedź na pytania.**



- a) W którym tygodniu zespół „Z Marszu” sprzedał najwięcej płyt?
- b) Ile płyt CD sprzedał zespół „Megis” w 2 tygodniu?
- c) Który zespół sprzedał najwięcej płyt (i ile) w ostatnim tygodniu maja?
- d) W którym tygodniu były największa oraz najmniejsza różnice w sprzedaży płyt CD obu zespołów? Największa –, najmniejsza –
- e) Który zespół w ciągu tygodnia sprzedał o tysiąc płyt CD więcej niż w ubiegłym?
- f) Ile co najmniej tysięcy płyt CD sprzedał każdy zespół w każdym tygodniu? „Megis” –, „Z Marszu” –

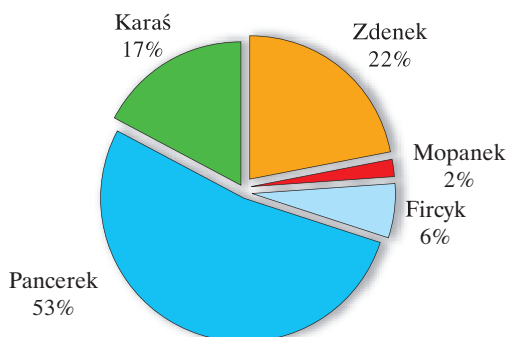
13.4. Diagram kołowy

1. Odczytaj z diagramu kołowego udział procentowy oceny z ostatniej pracy klasowej z fizyki. **Odpowiedz na pytania.**



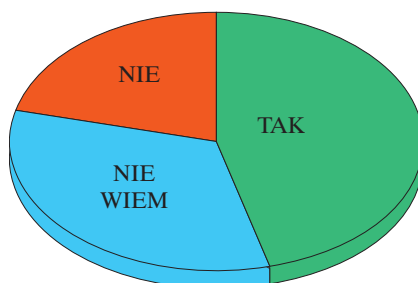
- a) Jakich ocen było najwięcej?
- b) Jakich ocen było najmniej?
- c) Ile procent uczniów otrzymało ocenę dostateczną?
- d) Ilu procent uczniów otrzymało ocenę co najmniej dobrą?
- e) O ile mniej procent uczniów zdobyło ocenę celującą niż bardzo dobrą?

2. Poniższy wykres przedstawia zysk (przedstawiony w procentach), który osiągnęło pięć firm w ciągu roku. **Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.**



- a) Która firma osiągnęła najmniej zysk?
- b) Która firma osiągnęła największy zysk i o ile procent więcej niż firma z najmniejszym zyskiem?
- c) Które firmy osiągnęły zysk większy niż 20%?
- d) Która firma osiągnęła zysk w wysokości 6%?
- e) Jaki zysk osiągnęła firma „Karaś” i o ile był on mniejszy od zysku firmy „Zdenek”?

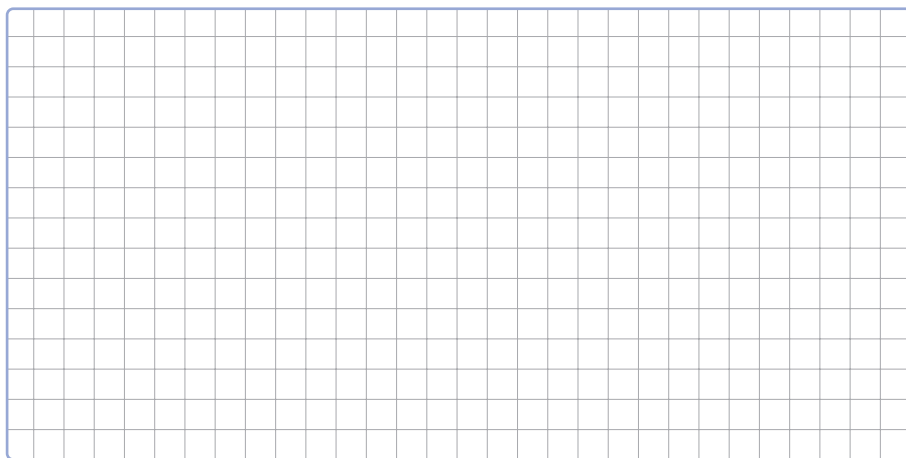
3. Poniższy wykres kołowy przedstawia odpowiedzi 100 losowo wybranych mieszkańców zebrane w ankiecie dotyczącej wybudowania na osiedlu supermarketu. **Analizując wykres, odpowiedz na pytania.**





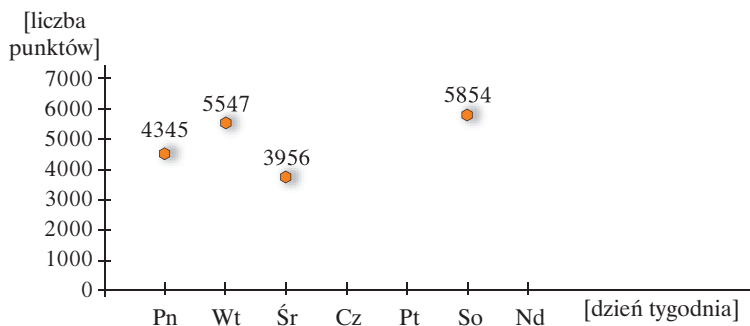
- a) Czy na osiedlu powstanie supermarket?
- b) Jaka odpowiedź wśród respondentów padała najczęściej?
- c) Na podstawie przedstawionych w tabeli danych liczbowych narysuj diagram pionowy.

Odpowiedzi	Liczba głosów
Tak	46
Nie wiem	33
Nie	21



13.5. Wykres punktowy

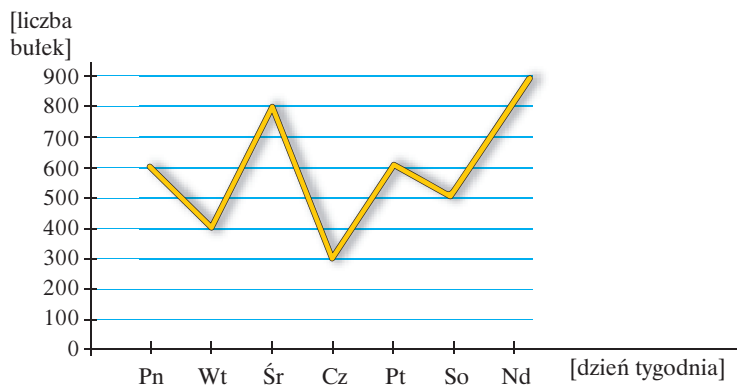
1. W czasie wakacji Jurek postanowił pograć w komputerowy bilard. Wykres przedstawia wyniki gry w ciągu tygodnia.



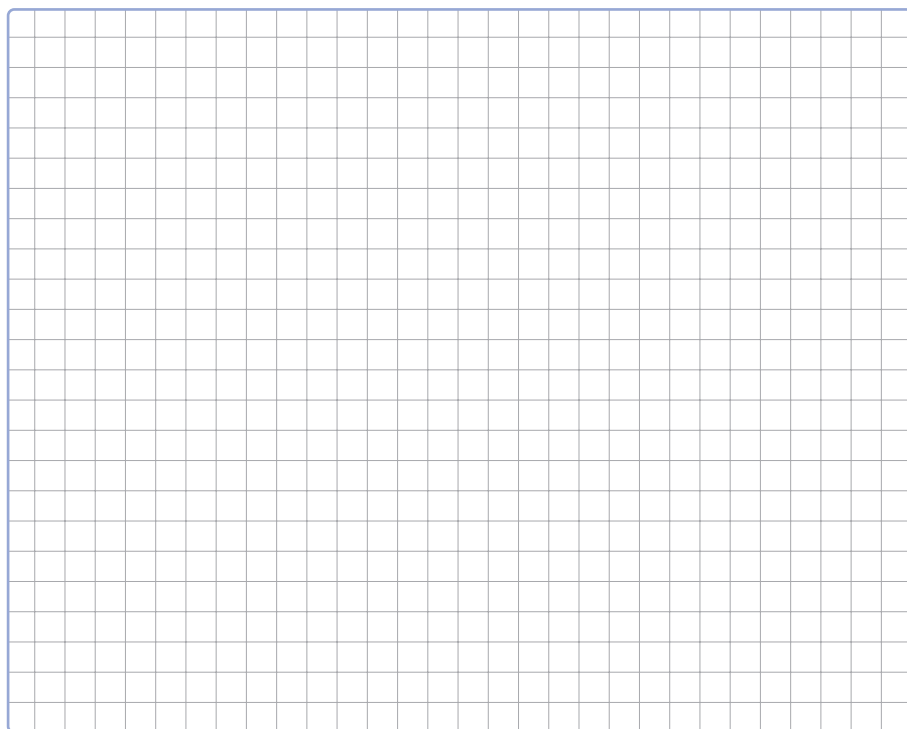
- a) Ile punktów zdobył Jurek we wtorek?
- b) W jakie dni Jurek zdobył więcej niż 5 tysięcy punktów?

13.6. Wykres liniowy

1. Poniższy wykres przedstawia produkcję chleba w piekarni „7 zbóż”. Korzystając z wykresu, odpowiedz na pytania.

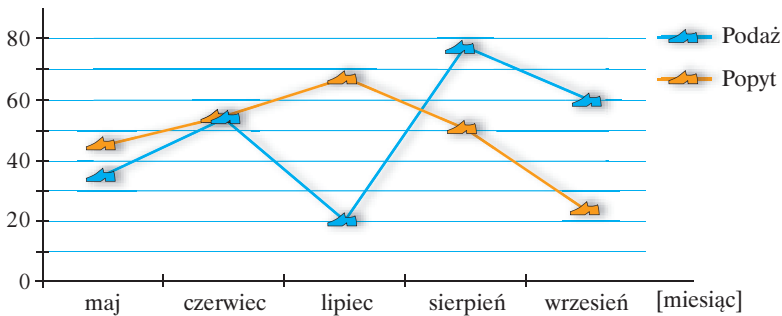


- W jaki dzień tygodnia piekarnia wyprodukowała najwięcej chleba?
- W jakie dni piekarnia wyprodukowała więcej chleba niż 500?
- O ile mniej chleba wyprodukowano w czwartek niż w środę?
- Ile wyprodukowano chleba w ciągu całego tygodnia?
- Przedstaw te same dane na wykresie innym niż liniowy.



2. Prezesowi firmy „Butex” przedstawiono wykres podaży (produkcji) obuwia (w tys. sztuk) oraz popytu (zapotrzebowania) na obuwie na rynku w ciągu kilku miesięcy. **Analizując diagram, odpowiedź na pytania.**

[liczba obuwia
w tysiącach]



- a) W jakim miesiącu był najmniejszy popyt na obuwie?
- b) W jakich miesiącach produkcja wzrastała?
- c) W jakich miesiącach był większy popyt na obuwie niż podaż?
- d) W jakim miesiącu była najmniejsza różnica między podażą a popytem?

14. Wybrane wartości średnie

14.1. Średnia arytmetyczna

1. Średnia arytmetyczna to

.....

.....

.....

2. Poniższe dane przedstawiają liczbę gazet, jakie kupował Paweł w poszczególnych miesiącach. **Oblicz średnią arytmetyczną.** Styczeń: 4, Luty: 6, Marzec: 1, Kwiecień: 3, Maj: 2, Czerwiec: 3

.....

.....

.....

.....

.....

3. W sklepie spożywczym notowano w ciągu dnia sprzedaż jajek-niespodzianek. Oblicz średnią arytmetyczną, mając dane: 3, 5, 3, 2, 1, 2, 2, 3.

4. Poniżej przedstawiono liczbę nieobecności w maju uczniów pierwszych klas. **Oblicz średnią arytmetyczną:** I A: 4, I B: 1, I C: 0, I D: 3

14.2. Moda i mediana

1. Moda z próby to

2. Mediana próby to

3. Rzucono kilka razy kostką i otrzymano następujące wyniki: 6, 1, 1, 4, 6, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 5, 1, 3. **Wyznacz modę i medianę.**

4. W pewnej klasie zmierzono wzrost dziewcząt i zapisano te wyniki z dokładnością do 1 centymetra: 156, 140, 138, 159, 160, 140, 139, 156, 155, 140, 148, 139. **Wyznacz modę i medianę.**

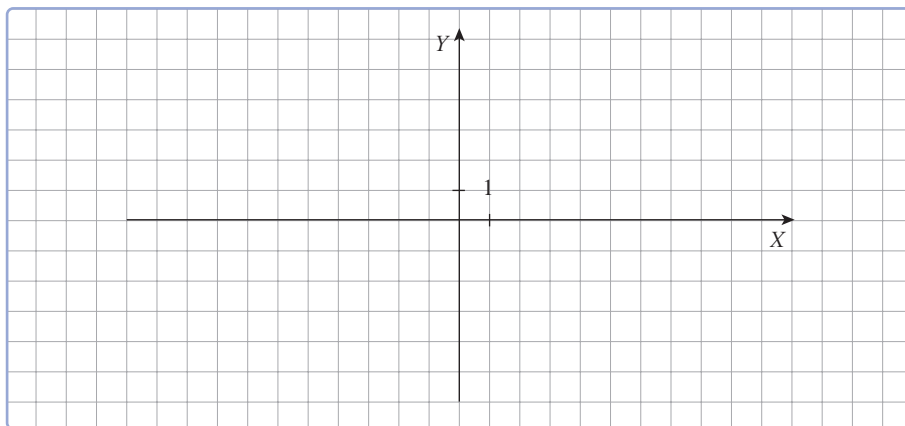
5. Poniżej przedstawiono liczbę zdobytych punktów ze sprawdzianu poprawkowego z matematyki. **Oblicz modę i medianę.**
20, 9, 6, 8, 15, 7, 6, 18, 20, 21, 20, 18, 8, 12, 10, 26, 18.

6. Na wycieczkę w góry pojechały osoby w różnym wieku: 30, 25, 29, 31, 25, 22, 28, 31, 27, 19, 21, 34. **Wyznacz modę i medianę wieku uczestników wycieczki.**

IV. Test końcowy

1. Dana jest funkcja $f(x) = \text{reszta z dzielenia } x \text{ przez } 4$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

- Naszkicuj wykres tej funkcji.
- Podaj zbiór wartości.
- Wyznacz miejsca zerowe.



.....

.....

.....

2. Dana jest funkcja $f(x) = 3x + b$. Wyznacz współczynnik b , jeśli wiesz, że do wykresu należy punkt $P = (-2; 4)$. Następnie wyznacz punkty przecięcia wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych.

.....

.....

.....

.....

3. Sprawdź, czy pierwiastek równania $(x - 3)^2 + 3x - 5(x - 1) = (x + 2)^2 - 14$ należy do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{x + 3}{2} - \frac{2x - 1}{3} < 9$.

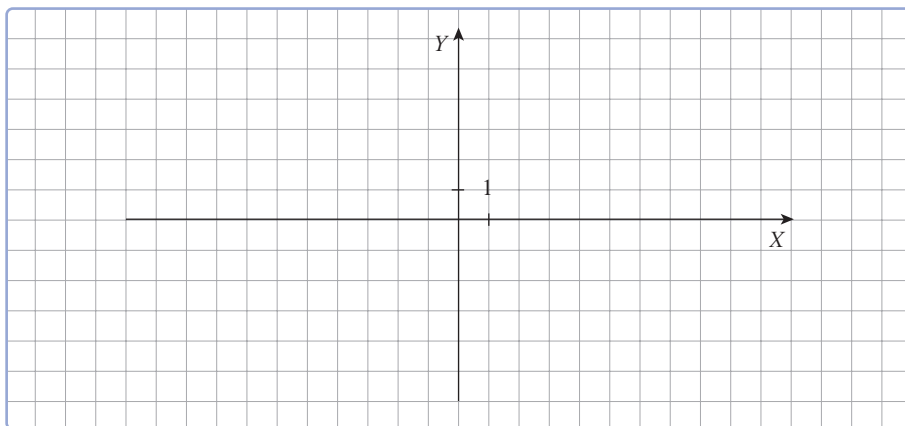
.....

.....

.....

.....

4. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ:
$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$



5. Znajdź równanie paraboli, której wierzchołkiem jest punkt $W = (-1; 3)$, jeśli wiesz, że należy do niej punkt $A = (-2; 7)$.

6. a) Rozwiąż nierówność: $12x^2 + x - 1 > 0$.





b) Rozwiązaniem nierówności $-(x-a)(x-b) \geq 0$ jest przedział $\langle -8; -1 \rangle$. Wyznacz liczby a, b

7. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x^3 + 4x^2 - 3x - 12}$.

8. Pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + mx + 2$ jest liczba (-1) . Wyznacz liczbę m i sprawdź, czy wielomian ma inne pierwiastki.

9. Oblicz objętość prostopadłościanu, jeśli wiesz, że jego podstawą jest kwadrat, a przekątna prostopadłościanu długości $d = 12$ tworzy z podstawą kąt $\alpha = 60^\circ$.

10. Oblicz objętość i pole całkowite czworoscianu foremnego o krawędzi $a = 8$.

11. Powierzchnia boczna walca po rozłożeniu na płaszczyznę jest prostokątem o przekątnej $d = 26$ i boku odpowiadającym wysokości walca 10. **Oblicz objętość i pole całkowite walca.**

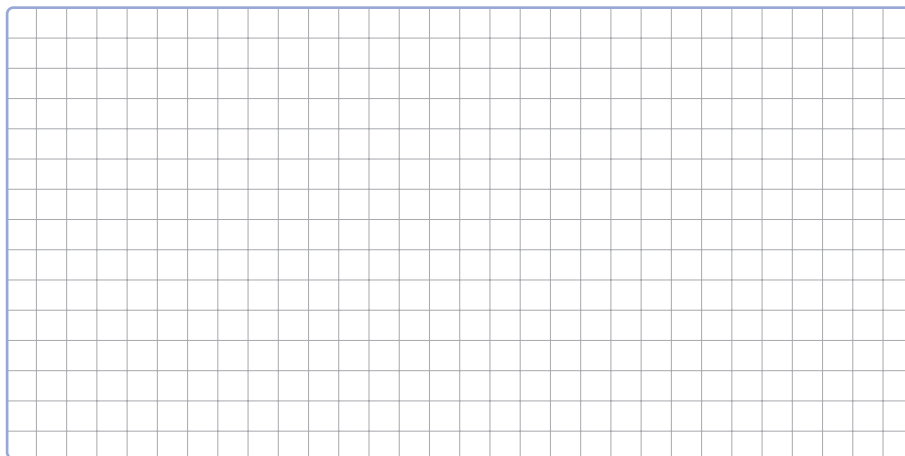
12. W tabeli zawarto wyniki odpowiedzi pewnej grupy uczniów na pytanie „Ile filmów obejrzałeś w kinie w ostatnim półroczu?”.

Liczba obejrzanych w kinie filmów	1	2	3	4	5	6
Liczba osób	1	6	8	10	8	7





a) Narysuj diagram słupkowy dla tych danych.



b) Oblicz średnią liczbę obejrzanych w kinie filmów, jaka przypada na jednego ucznia.

.....

.....

c) Podaj medianę i dominantę.

.....

.....

.....