

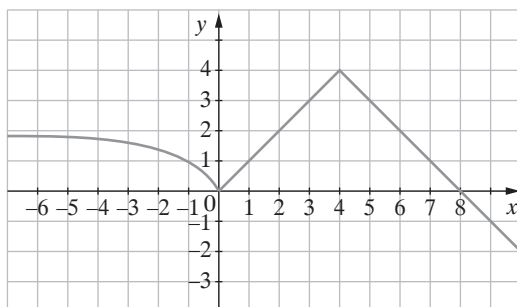
KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Listopad 2013

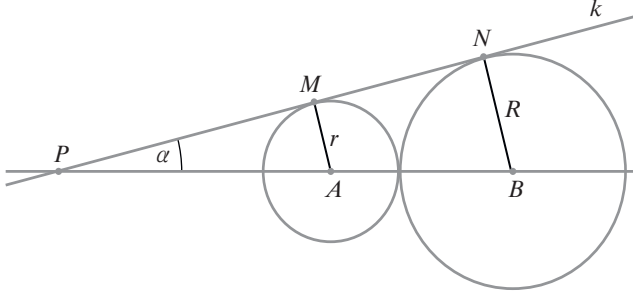
W niniejszym schemacie oceniania zadań otwartych są prezentowane przykładowe poprawne odpowiedzi. W tego typu zadaniach należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest zgodny z podanym schematem, oraz inne poprawne odpowiedzi w nim nieprzewidziane.

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
1.	Postęp: zapisanie tylko warunków: $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	1 pkt
	Istotny postęp: zapisanie warunków: $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie wzorów Viete'a i wyznaczenie: $\Delta = 12m^2 + 5$, $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1$, $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zauważenie, że wszystkie warunki $\Delta = 12m^2 + 5 > 0$, $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1 > 0$, $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3 > 0$ zachodzą dla $m \in \mathbb{R}$	4 pkt
2.	Istotny postęp: poprawne narysowanie każdej części wykresu, niekoniecznie uwzględniając dziedzinę	2 pkt (po 1 pkt za każdą część)
	Pokonanie zasadniczych trudności: sporządzenie całego wykresu funkcji $y = f(x)$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty, 0)$, 1 rozwiązanie dla $m \in (4, +\infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0, 4\}$, 3 rozwiązania dla $m \in (2, 4)$, 4 rozwiązania dla $m \in (0, 2)$.	5 pkt (4 pkt, jeśli po- pełniono jeden błąd)

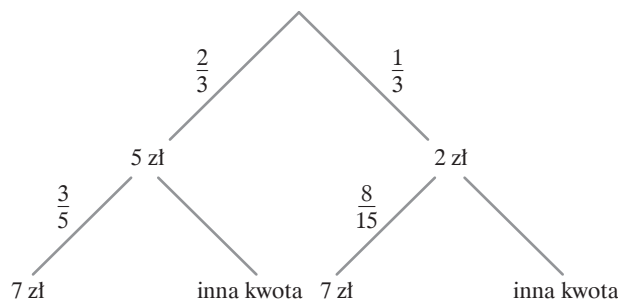


Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
3.	Postęp: zapisanie: $W(x) = 2(x-1)^2(x+2)$	1 pkt
	Istotny postęp: uporządkowanie postaci iloczynowej i porównanie: $2x^3 + ax^2 + bx + c = 2x^3 - 6x + 4$ wyznaczenie: $a = 0, b = -6, c = 4$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie wielomianu: $W(x+1) = 2x^3 + 6x^2$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie nierówności i zapisanie zbioru rozwiązań: $(-\infty, -3)$	4 pkt
4.	Postęp: zapisanie: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: przekształcenie drugiego czynnika: $a^3 - b^3 = (a-b)((a+b)^2 - ab)$	2 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: stwierdzenie na podstawie założenia, że jeżeli liczby $(a+b)^2$ i ab są podzielne przez k , to ich różnica jest podzielna przez k oraz $a-b$ jest liczbą całkowitą lub zapisanie: $a^3 - b^3 = (a-b)((a+b)^2 - ab) = (a-b)(k^2p^2 - kq) = k(a-b)(kp^2 - q)$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi oraz $a-b$ i $kp^2 - q$ są liczbami całkowitymi	3 pkt
5.	Postęp: zapisanie warunków: $\begin{cases} (1) x+1 > 0 \\ (2) \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \\ (3) \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right) \geq 0 \end{cases}$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie jednego z warunków (2) lub (3) (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_{\frac{1}{3}}1 \Leftrightarrow 0 < x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ (3) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \geq 1 \Leftrightarrow 0 < x+1 \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -1 < x \leq -\frac{2}{3}$	3 pkt (2 pkt, jeśli rozwiązano jeden warunek)
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie układu wszystkich warunków $\begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 0 \\ -1 < x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$ i zapisanie: $D = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$	4 pkt

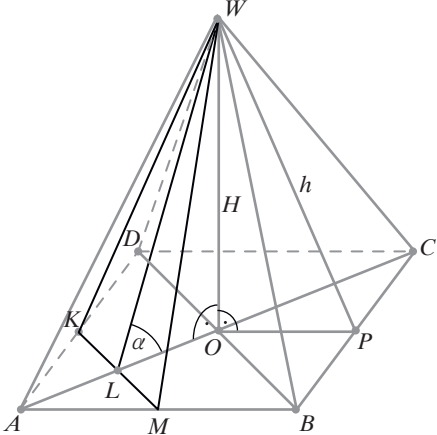
Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
6.	Istotny postęp: zapisanie: $b_{n+1} = 5^{2n+1} = 5^{2n+r} = 5^{2n} \cdot 5^r = b_n \cdot 5^r$, $n \in N_+$ i 5^r – liczba	2 pkt (1 pkt, jeśli niewyjaśniono, że 5^r jest liczbą)
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie: $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = 5^{2^1+2^2+\dots+2^n}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: zastosowanie wzorów na n -tą sumę częściową	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n = 5^{\frac{3n^2-n}{2}}$	5 pkt
7.	Postęp: zapisanie alternatywy układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \cos x < 0 \\ -2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie wzoru na $\sin 2x$ $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \cos x < 0 \\ -\sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie równań dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$: $\sin 2x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{12} \text{ lub } x = \frac{5\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{13\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{17\pi}{12}$ $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{7\pi}{12} \text{ lub } x = \frac{11\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{19\pi}{12}, \text{ lub } x = \frac{23\pi}{12}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: poprawne rozwiązanie każdego z układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \cos x < 0 \\ x \in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \end{cases}$ $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right] \text{ lub } x \in \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right]$	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie rozwiązania $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right]$	5 pkt

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
8.	<p>Postęp: wykonanie rysunku</p>  <p>lub opis oznaczeń: <i>P</i> – punkt przecięcia prostej <i>k</i> z prostą <i>AB</i> <i>M</i> – punkt styczności $o(A, r)$ z prostą <i>k</i> <i>N</i> – punkt styczności $o(B, R)$ z prostą <i>k</i></p>	1 pkt
	<p>Istotny postęp: zastosowanie twierdzenia Talesa: $\frac{ BN }{ BP } = \frac{ AM }{ AP }, \frac{R}{R+r+a} = \frac{r}{a}$, gdzie $AP =a$</p>	2 pkt
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie $AP =a = \frac{(R+r)r}{R-r}$</p>	3 pkt
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie z trójkąta <i>AMP</i>: $\sin \alpha = \frac{r}{ AP } = \frac{R-r}{R+r}$</p>	4 pkt
9.	<p>Postęp: oznaczenie wierzchołków trójkąta: $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ i wykorzystanie wzoru na współrzędne środka odcinka: $K = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right), L = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right)$ i $M = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$</p>	1 pkt
	<p>Istotny postęp: zapisanie odpowiednich układów równań: $\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = -1 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 1 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases}$</p>	2 pkt
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie układów równań i zapisanie współrzędnych punktów: $A = (3, 0), B = (1, 4), C = (-5, -2)$</p>	3 pkt
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie obrazów punktów <i>A, B, C</i> symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych $A' = (-3, 0), B' = (-1, -4), C' = (5, 2)$</p>	4 pkt

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
10.	Postęp: zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i obliczenie $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{3}{5}$	1 pkt
	Istotny postęp: obliczenie $\cos(\sphericalangle ABC) = \frac{4}{5}$, $\sphericalangle ABC$ – kąt ostry	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABK $ AK ^2 = 10^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie $ AK = 6\sqrt{2}$	4 pkt
11.	Postęp: obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania z zielonego pudełka 5 zł oraz 2 zł $P(B_1) = \frac{2}{3}$ $P(B_2) = \frac{1}{3}$	1 pkt
	Istotny postęp: obliczenie prawdopodobieństw przy losowaniu z białego pudełka $p_1 = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{5}$ $p_2 = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: narysowanie drzewka i podpisanie odpowiednich gałęzi	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{15} = \frac{26}{45}$	4 pkt



Uwaga:
Jeżeli uczeń od razu narysował drzewko odpowiadające opisanej w zadaniu sytuacji i poprawnie wpisał prawdopodobieństwa na potrzebnych gałęziach, to również otrzymuje 3 pkt.

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
12.	<p>Postęp: sporządzenie poprawnego rysunku z oznaczeniami: OW – wysokość bryły, LW – wysokość trójkąta powstałego w przekroju</p>  <p>lub opisanie oznaczeń bez rysunku i wyjaśnienie, że kąt α jest wyznaczony przez wysokość przekroju i przekątną podstawy</p>	1 pkt
	<p>Istotny postęp: wyznaczenie długości odcinka OL: $OL = \frac{a\sqrt{2}}{4}$</p>	2 pkt
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie z trójkąta OLW długości wysokości ostrosłupa: $H = OW = \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$</p>	3 pkt
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \operatorname{tg} \alpha$</p>	4 pkt